Université Paris Diderot
L3 mathématiques

Analyse complexe – Année 2011-12

Feuille 7

Le groupe fondamental

1. Montrer que tout lacet du plan complexe est rétractile (c'est-à-dire strictement homotope à un lacet constant).

2. Montrer que tout lacet de la sphère de Riemann est strictement homotope à un lacet constant.

3. Montrer que la spère de Riemann privée d'un point est homéomorphe au plan complexe. En déduire que tout lacet de la sphère de Riemann privé d'un point est strictement homotope à un lacet constant.

4. Tout lacet du plan complexe privé d'un point est-il rétractile?

5. Soient U_1 et U_2 des ouverts simplements connexes de $\mathbf{C}$ tels que $U_1 \cap U_2$ est connexe par arc. Montrer que $U_1 \cup U_2$ est simplement connexe.

6. Soient γ_1 et γ_2 deux lacets d'un ouvert U de $\mathbf{C}$ ayant même origine. Soit f une fonction holomorphe sur U.
6.a Montrer que $\int_{\gamma_1.\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2.\gamma_1} f(z)\,dz$.
6.b En déduire qu'on a $\int_{\gamma_1.\gamma_2.\gamma_1^{-1}.\gamma_2^{-1}} f(z)\,dz = 0$.
6.c Montrer que pour $U = \mathbf{C} - \{0,1\}$. On peut trouver γ_1 et γ_2 tels que $\gamma_1.\gamma_2$ ne soit pas strictement homotope à $\gamma_2.\gamma_1$.
6.d Montrer qu'alors il existe un lacet γ de U, non rétractile tel que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pour tout $f \in \mathcal{H}(U)$.

7. Considérons le chemin γ composé des chemins suivants : $t \mapsto (1-t) + it$, $t \mapsto (1-t)i - t$, $t \mapsto t - 1 - it$ et $(t-1)i + t$.
7.a Montrer que γ est un lacet strictement homotope au lacet $t \mapsto e^{2i\pi t}$
7.b Calculer l'intégrale $\int_\gamma dz/z$.

8. Soit f une fonction entière. Soit $I = [a,b]$ un intervalle réel. Soit γ le chemin $t \mapsto (1-t)a + tb$. Montrer qu'on a $\int_a^b f(t)\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz$.

9. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $z_0 \in U$. On dit que U est *étoilé autour de* z_0 si pour tout $z \in U$ le segment $[z_0, z]$ est contenu dans U.
9.a Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbf{C}$ lesquels sont étoilés autour d'un point : une boule ouverte, l'intérieur d'un carré, un demi-plan ouvert, un cône ouvert, le plan complexe privé d'un point, le plan complexe privé d'une droite, le plan complexe privé d'une demi-droite ?
9.b Un ouvert étoilé autour d'un point est-il connexe ?
9.c Montrer que tout ouvert étoilé autour d'un point est simplement connexe.
9.d Tout ouvert simplement connexe est-il étoilé autour d'un point ?
9.e Soit U un ouvert étoilé autour d'un point. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Soit c un chemin de U. Montrer qu'on a $\int_c f(z)\,dz = 0$.

10. Soit n un entier ≥ 2. Soit R un nombre réel > 1. Considérons le lacet γ_R composé des lacets suivants: $t \mapsto tR$, $t \mapsto Re^{2i\pi t/n}$ et $t \mapsto R(1-t)e^{2i\pi/n}$.
10.a Calculer $\int_{\gamma_R} dz/(1+z^n)$.
10.b En déduire que $\int_0^\infty dx/(1+x^n) = \pi/(n\sin(\pi/n))$.