Université Paris Diderot
L3 mathématiques

Analyse complexe – Année 2011-12

Feuille 6

Zéros de fonctions holomorphes

1. Montrer que le polynôme $f(z) = z^5 + 5z^3 + z - 2$ possède trois zéros dans $B(0,1)$ et que tous ses zéros sont dans $B(0,3)$.

2. Déterminer le nombre de zéros des polynômes suivants dans $B(0,1)$: $z^4 - 3z + 1$, $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$, $2z^4 - 5z + 2$.

3. Déterminer le nombre de zéros des polynômes suivants dans $B(0,2)$: $z^4 - 9z + 1$, $z^3 - 12z + 2$.

4. Déterminer le nombre de zéros du polynôme $z^5 + z^3 - 4z + 1$ dans $B(0,3) - B(0,1)$.

5. On se propose de démontrer que $\mathbf{C}$ est algébriquement clos grâce au théorème de Rouché. Soit $P \in \mathbf{C}[z]$ un polynôme non nul. Notons $a_n z^n$ son coefficient dominant (on a donc $a_n \neq 0$).
5.a Montrer que, pour $|z|$ assez grand, on a $|a_n z^n| > |P(z) - a_n z^n|$.
5.b Montrer que, pour $R \in \mathbf{R}$ assez grand, P possède n racines dans $B(0,R)$.
5.c En déduire que le corps $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.

6. Soit $P = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme unitaire de degré n.
6.a. Supposons P irréductible. Montrer que P possède une racine dans $\mathbf{C}$ de module ≥ 1.
6.b Montrer que le nombre de facteurs irréductibles de P dans $\mathbf{Z}$ est plus petit que le nombre de racines de P de module ≥ 1.
6.c Supposons que P possède $n-1$ racines dans $B(0,1)$. Montrer que P est irréductible sur $\mathbf{Z}$.
6.d Supposons qu'on ait $|a_{n-1}| > 1 + |a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-2}|$. Montrer que P possède $n-1$ racines dans $B(0,1)$ et donc que P est irréductible.

7. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(\lambda) > 1$. Montrer qu'il existe un unique $z \in \mathbf{C}$ avec $\Re(z) > 0$ tel que $e^z - z + \lambda = 0$.

8. Soit f une fonction entière et bijective.
8.a Montrer que f' ne s'annule jamais.
8.b Montrer que f ne peut pas être un polynôme de degré > 1.
8.c Soit $r > 0$. Montrer que $f^{-1}(\bar{B}(0,r))$ est borné.
8.d Montrer que si $|f(z)| \to \infty$ lorsque $|z| \to \infty$.
8.e Soit $z_0 \in \mathbf{C}$. Montrer que la fonction $z \mapsto g(z) = (z - z_0)/(f(z) - f(z_0))$ se prolonge en une fonction entière.
8.f Montrer qu'on a $|g(z)| = O(|z|)$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini.
8.g Montrer que g est un polynôme de degré ≤ 1.
8.h En déduire que f est un polynôme de degré 1.

9 Soit f une fonction entière. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ qui n'est pas dans l'image de f.
9.a Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $B(z_0, r)$ ne contiennent aucun élément de l'image de f. Montrer que l'application $z \mapsto 1/(f(z) - z_0)$ est bornée.
9.b En déduire que si f est non constante, son image est dense dans $\mathbf{C}$.
9.c Existe-t-il une fonction entière non constante qui ne prend pas la valeur z_0 ?
9.d Existe-t-il une fonction entière non constante dont l'image évite une infinité de nombres complexes ?
9.e Existe-t-il une fonction entière non constante qui ne prend ni la valeur 1, ni la valeur 0 ?

10. Soit $(a_n)n \geq 0$ une suite de nombres complexes tels que la série $\sum_{n=0}^{\infty} 1/a_n$ est absolument convergente.
10.a Y a-t-il une fonction entière f dont les zéros coïncident avec la famille $(a_n)n \geq 0$?
10.b Une telle fonction est-elle unique ?
10.c La convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} 1/a_n$ est-elle nécessaire à l'existence de f ?