Université Paris Diderot
L3 mathématiques

Analyse complexe – Année 2011-12

Feuille 5

Résidus, suites, séries, produits infinis

1. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction (nécessairement holomorphe) f. Soient $a \in \mathbf{C}$ et $R > 0$ tels que $\bar{B}(a,R) \subset U$. Supposons que f est sans zéro sur $\mathcal{C}(a,R)$ et qu'elle s'annule une fois au moins dans $B(a,R)$.
1.a. Démontrer que pour n assez grand, f_n s'annule au moins une fois dans $B(a,R)$.
1.b. En déduire que si les fonctions f_n sont sans zéro, f est nulle ou sans zéro (théorème d'Hurwitz).
1.c. En déduire que si les fonctions f_n sont injectives, f est injective ou constante.

2. Déterminer les résidus suivants : $\mathrm{Res}_{z=1}e^z/(z-1)^2$, $\mathrm{Res}_{z=\pi/4}\cos(z)/(z-\pi/4)$ et $\mathrm{Res}_{z=0}e^{z^2}/z^{2n+1}$, où n est un entier ≥ 0.

3. Calculer les intégrales suivantes : $I_1 = \int_0^{2\pi} dt/(2-\cos(t))$, $I_2 = \int_0^{2\pi} \cos(t)\,dt/(a+\cos(t))$ et $I_3 = \int_0^{2\pi} dt/(b+\cos(t)+\sin(t))$.

4.a Montrer que le produit infini $F(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^2/n^2)$ converge pour tout $z \in \mathbf{C}$.
4.b Montrer que la fonction F est entière.
4.c Quels sont les zéros de F ? Quelles sont les valuations en ces zéros ?
4.d Montrer que la fonction $z \mapsto G(z) = F(z)/\sin(\pi z)$ se prolonge en une fonction entière sans zéro.
4.e Calculer $G'(z)/G(z)$. Montrer que c'est une fonction entière et bornée.
4.f Montrer qu'il existe une fonction entière g telle que $G = e^g$. Montrer que g' est constante.
4.g Montrer que

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1-z^2/n^2).$$

5.a Montrer que la série de fonctions méromorphes $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(z-n)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}-\mathbf{N}$.
5.b La limite est-elle méromorphe sur $\mathbf{C}$.

6.a Soit $z \in B(0,1)$. Montrer que le produit infinit $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{2^n})$ converge. Puis que l'application f est holomorphe sur $B(0,1)$.
6.b Montrer qu'on a $f(z^2) = f(z)/(1+z)$ $(z \in B(0,1))$.
6.c En déduire qu'on a $f(z) = 1/(1-z)$ $(z \in B(0,1))$.

7. Montrer que les séries suivantes définissent des fonctions holomorphes sur les domaines indiqués : $\sum_{n=1}^{\infty}(z(z+n)/n)^n$ $(z \in B(0,1))$, $\sum_{n=1}^{\infty} n!\sin(nz)/n^n$ $(\Im(z) < 1)$, $\sum_{n=0}^{\infty}\cos(nz)/n!$ $(z \in \mathbf{C})$.