Université Paris Diderot
L3 mathématiques

Analyse complexe – Année 2011-12

Feuille 4

Fonctions méromorphes

1. Montrer que toute fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ dont les valeurs différentes de ∞ sont bornées est constante.

2.a. Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$. Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbf{C}[z]$ non nul tel que Pf se prolonge en une fonction holomorphe ?
2.b Soit U un ouvert borné de $\mathbf{C}$. Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$. Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbf{C}[z]$ non nul tel que Pf se prolonge en une fonction holomorphe sur U ?
2.c Soit U un ouvert borné de $\mathbf{C}$. Soit f une fonction méromorphe sur U. Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbf{C}[z]$ non nul tel que Pf se prolonge en une fonction holomorphe sur U ?

3. Existe-t-il une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ dont les pôles sont les entiers? Les nombres rationnels ? Les nombres premiers ? Les racines de l'unité ?

4. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$.
4.a Soit f une fonction méromorphe sur U. Pour tout $z_0 \in U$ montrer que f est holomorphe au voisinage de z_0 ou $1/f$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de z_0.
4.b Réciproquement si f est une fonction $U \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, telle que pour tout $z_0 \in U$ la fonction f est holomorphe au voisinage de z_0 ou $1/f$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de z_0. La fonction f est-elle méromorphe sur U?

5. Donner le développement en série de Laurent en 0 de la fonction $z \mapsto 1/(1-z^2) + 1/(3-z)$ puis de la fonction $z \mapsto ze^z/(z-1)$.

6. Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$. Montrer que e^f est méromorphe si et seulement si f est holomorphe.

7. La fonction $z \mapsto z^2 e^{1/z}$ admet-elle un développement en série de Laurent en 0 ? Même question pour la fonction $z \mapsto z\sin(1/z)$. Même question pour la fonction logarithme (dont la définition sera à discuter).

8. Calculer les intégrales suivantes : $\int_{\mathcal{C}(1,1)} dz/(1+z^4)$, $\int_{\mathcal{C}(1+i,2)} dz/((z-1)^2(1+z^2))$ et finalement la différence $\int_{\mathcal{C}(0,2)} dz/((z-3)^2(z^2-1)) - \int_{\mathcal{C}(0,4)} dz/((z-3)^2(z^2-1))$.

9. Posons $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$ avec $ad - bc \neq 0$. Considérons ϕ_M : $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ définie par $\phi_M(z) = (az+b)/(cz+d)$ si $z \neq \infty$ et $z \neq -d/c$, $\phi_M(\infty) = a/c$ et $\phi(-d/c) = \infty$ (Lorsque $c = 0$, on pose $\phi_M(\infty) = \infty$). Montrer que ϕ_M est bijective. Montrer que $\phi_M \circ \phi_{M'} = \phi_{MM'}$. Une droite complétée de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est une droite à laquelle on adjoint ∞. Montrer que l'image d'un cercle (resp. d'une droite complétée) par ϕ_M est un cercle ou une droite complétée. Montrer que l'image d'une droite à laquelle on ajoute ∞ est un cercle ou une droite

10. Soit U un ouvert de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Soit f: $U \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. On dit que f est *holomorphe* (resp. *méromorphe*) sur U, si elle est continue sur U, holomorphe (resp. méromorphe) sur $U - \{\infty\}$ et, lorsque $\infty \in U$ si $z \mapsto f(1/z)$ est holomorphe (resp. méromorphe) au voisinage de 0.
10.a Montrer que toute fraction rationnelle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.
10.b Montrer que la fonction exponentielle ne se prolonge pas en une fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.
10.c Montrer que si f est holomorphe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, elle est constante.
10.d Montrer qu'une fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ n'a qu'un nombre fini de pôles.
10.e Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[z]$ tel que Pf est holomorphe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.
10.f Montrer que toute fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est une fraction rationnelle ((on pourra utiliser un exercice d'une feuille précédente: toute fonction entière bornée par un polynôme en module est un polynôme.)