Université Paris Diderot
L3 mathématiques

Analyse complexe – Année 2011-12

Feuille 3

Propriétés des fonctions holomorphes

1. Soit f une fonction entière. Supposons que $|f(z)| \to \infty$ lorsque $|z| \to \infty$.
1.a. En considérant $1/f$, montrer que f admet des zéros dans $\mathbf{C}$.
1.b. Montrer qu'elle n'admet qu'un nombre fini de zéros, que l'on notera z_1, $z_2 ... z_n$ (comptés avec multiplicité).
1.c. En considérant la fonction $z \mapsto f(z)/\prod_{i=1}^{n}(z - z_i)$ montrer que f est un polynôme.

2. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit f et g deux fonctions holomorphes sur U telles que fg est nulle. Montrer que f ou g est nulle.

3. Soit f une fonction continue $\bar{B}(0, 1) \to \mathbf{C}$ et holomorphe sur $B(0, 1)$.
3.a. Supposons que f est nulle sur $\mathcal{C}(0, 1)$, montrer que f est nulle.
3.b. Supposons que f est nulle sur le demi-cercle $\{e^{i\theta}/\theta \in [0, \pi]\}$, montrer que f est nulle (on pourra considérer la fonction $z \mapsto f(z)f(-z)$).
3.c. Soit n un entier ≥ 1. Supposons que f est nulle sur $\{e^{i\theta}/\theta \in [0, 2\pi/n]\}$. Montrer que f est nulle.

4. Soit f une fonction entière. Supposons qu'il existe $M > 0$ et n un entier ≥ 0 tels que $|f(z)| < M|z|^n$ $(z \in \mathbf{C})$.
4.a. Trouver un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $f - P$ a zéro d'ordre n en $z = 0$.
4.b. En appliquant le théorème de Liouville, montrer que f est un polynôme.

5. Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leq 1/|z|$ (n entier ≥ 1, $z \in \mathcal{C}(0, n)$). Montrer que f est constante. On pourra appliquer les formules de Cauchy.

6. Posons, pour $z \in \bar{B}(0, 1)$, $f(z) = (4z + 3)/(4 + 3z)$.
6.a. Montrer que $f(\mathcal{C}(0, 1)) \subset \mathcal{C}(0, 1)$.
6.b. En déduire que $|f(z)| < 1$ $(z \in B(0, 1))$.

7. Soit $a \in \mathbf{C}$. Soit $R > 0$. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant $\bar{B}(a, R)$. Supposons qu'il existe $z_0 \in B(a, R)$ tel que $|f(z)| > |f(z_0|$ $(z \in B(a, R))$. Montrer que f s'annule en au moins un point de $B(a, R)$. (On pourra considérer $1/f$.)

8. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction (nécessairement holomorphe) f. Soient $a \in \mathbf{C}$ et $R > 0$ tels que $\bar{B}(a, R) \subset U$. Supposons que f est sans zéro sur $\mathcal{C}(a, R)$ et qu'elle s'annule une fois au moins dans $B(a, R)$.
8.a. Démontrer que pour n assez grand, f_n s'annule au moins une fois dans $B(a, R)$.
8.b. En déduire que si les fonctions f_n sont sans zéro, f est nulle ou sans zéro (théorème d'Hurwitz).
8.c. En déduire que si les fonctions f_n sont injectives, f est injective ou constante.

9. Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$. Soient f_1 et f_2 des fonctions holomorphes sur U qui vérifient l'équation différentielle $f_i'(z)^2 = 5f_i(z)^2 + 5z^4$ $(z \in U,\ i \in \{1, 2\})$. Soit $z_0 \in U$ tel que $f_1(z_0) = f_2(z_0)$.
9.a. Montrer que les dérivées successives en z_0 de f_1 et f_2 coïncident.
9.b. En déduire que $f_1 = f_2$.

10. Soit $z_0 \in B(0,1)$. Considérons la fonction $h_{z_0} : z \mapsto (z - z_0)/(z\bar{z}_0 - 1)$.
10.a. Montrer qu'elle est holomorphe sur $B(0,1)$, que $h_{z_0}(B(0,1)) = B(0,1)$ et que h_{z_0} admet une réciproque holomorphe sur $B(0,1)$.
10.b. Soient z_1 et $z_2 \in B(0,1)$. Montrer qu'il existe un unique $z_0 \in B(0,1)$ tel que $h_{z_0}(z_1) = z_2$.

11. Soit f une fonction holomorphe $B(0,1) \to B(0,1)$ qui est bijective et telle que f^{-1} est holomorphe (On dit que c'est une *transformation conforme*). Posons $z_0 = f(0)$. Posons $g(z) = (f(z) - z_0)/(\bar{z}_0 f(z) - 1)$.
11.a. Montrer que g est une transformation conforme de $B(0,1)$. (Utiliser 10.)
11.b. Montrer qu'on a $|g(z)| \leq |z|$ et $|g^{-1}(z)| \leq |z|$ $(z \in B(0,1))$.
11.c. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ avec $|\alpha| = 1$ tel que $g(z) = \alpha z$ $(z \in B(0,1))$.
11.d. Montrer que $f(z) = \alpha(z - z_0)/(z\bar{z}_0 - 1)$ $(z \in B(0,1))$.

12. Pour chacune des propriétés ci-dessous, déterminer s'il existe une fonction f holomorphe au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$. Pour tout n entier ≥ 1, on a
12.a. $f(1/n) = \sin(\pi n/2)$,
12.b. $f(1/n) = \cos(\pi n)/n$,
12.c. $f(1/n) = 1/(2n+1)$,
12.d. $f(1/n) = 1/(2n + \cos(\pi n))$,
12.e. $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^2$,
12.f. $f(1/n) = f(-1/n) = 1/(2n+1)$,
12.g. $f(1/n) = e^{-n}$.