Université Paris Diderot
L3 mathématiques

Analyse complexe – Année 2011-12

Feuille 2

Fonctions holomorphes et fonctions analytiques

1. Montrer qu'on a $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ ($z \in \mathbf{C}$).

2. Montrer les formules $\cos(z+z') = \cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z')$ et $\sin(z+z') = \cos(z)\sin(z') + \sin(z)\cos(z')$ ($z, z' \in \mathbf{C}$).

3. Trouver tous les points de $\mathbf{C}$ où les fonctions suivantes sont dérivables au sens complexe : $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto \Re(z)$, $z \mapsto |z|^2$, $z \mapsto z|z|$, $z = x + iy \mapsto x^2 + iy^2$, $z = x + iy \mapsto x^2y^2$.

4. Soit f la fonction $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(z) = e^{-1/z^4}$ ($z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$). Montrer que f admet des dérivées partielles en 0. Montrer qu'elle satisfait les équations de Cauchy-Riemann. Est-elle dérivable au sens complexe en 0 ?

5. Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Montrer que $\bar{f}$ est holomorphe si et seulement si f est constante. Est-ce encore vrai si U n'est pas connexe ?

6. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Montrer que la fonction $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ est holomorphe sur U. Si on suppose f entière et on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, à quelle condition a-t-on $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ ($z \in \mathbf{C}$) ?

7. Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Supposons qu'il existe a, b, $c \in \mathbf{C}$, non tous nuls, tels que $a\Re(f) + b\Im(f) + c = 0$. Montrer que f est constante. En déduire que si f est à valeurs réelles elle est constante.

8. Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Supposons qu'on ait $\Re(f) = \Im(f)^2$ montrer que f est constante.

9. Montrer que la fonction $z \mapsto 1/z$ est analytique sur $\mathbf{C} - \{0\}$.

10. Monter que la fonction $z = re^{i\theta} \mapsto \log(r) + i\theta$ est holomorphe pour $r > 0$, $\theta \in]-\pi, \pi[$. C'est la *détermination principale du logarithme*. Montrer qu'elle coïncide avec la fonction Log sur $B(1,1)$.

11. Déterminer $\{z \in \mathbf{C}/\cos(z) = 0\}$ et $\{z \in \mathbf{C}/\sin(z) = 0\}$.

12. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $\phi : U \to E$ de classe $\mathcal{C}^2$, où E un espace vectoriel réel (par exemple $E = \mathbf{R}$, ou $E = \mathbf{C}$. On dit que $\phi : z = x + iy \mapsto \phi(z)$ est *harmonique* si et seulement si on a $\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2 = 0$. Montrer que les parties réelles et imaginaires d'une fonction f de $\mathcal{H}(U)$ sont harmoniques. En déduire que f et $\bar{f}$ sont harmoniques.

13. Donner les développements en séries entières des fonctions suivantes : $z \mapsto z/(z^2 - 2z - 3)$ en 0, $z \mapsto 1/(3 - 2z)$ en 3 et $z \mapsto e^z$ en 1. Indiquer les rayons de convergence des séries.

14. Soit $z \in \mathbf{C}$. Montrer que pour n entier assez grand on a $1+z/n \in B(1,1)$. Montrer que $\mathrm{Log}(1+z/n) \simeq z/n$ lorsque n tend vers l'infini. En déduire que la suite $((1 + z/n)^n)_{n\geq 1}$ tend vers e^z. La convergence est-elle uniforme ? Est-elle uniforme sur tout compact ?

15. Soit $z \in B(0,1)$. Montrer qu'on a l'identité $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/(1-z^n) = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_1(m) z^m$, où $\sigma_1(m)$ est la somme des diviseurs de m.

Intégration circulaire de fonctions holomorphes

1. À l'aide de la formule intégrale de Cauchy, calculer les intégrales suivantes : $\int_{\mathcal{C}(-i,3)} \sin z \frac{dz}{z+i}$, $\int_{\mathcal{C}(0,2)} \frac{dz}{z^2+1}$, $\int_{\mathcal{C}(0,2)} \frac{dz}{z^2-1}$, $\int_{\mathcal{C}(0,4)} \frac{dz}{z^2-\pi^2}$, $\int_{\mathcal{C}(-1,1)} \frac{dz}{(1+z)(z-1)^3}$, $\int_{\mathcal{C}(i,1)} \cos(z) \frac{dz}{(z-i)^3}$, $\int_{\mathcal{C}(0,r)} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$ (pour a, b, r nombres réels vérifiant $|a| < r < |b|$, et n entier ≥ 1).

2. Soit f une fonction holomorphe sur $B(0,2)$. Soient a, $b \in B(0,1)$. Calculer $I(a,b) = \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$. Calculer $\lim_{a \to b} I(a,b)$.

3. Pour $R > 0$, calculer $I(R) = \int_{\mathcal{C}(0,R)} \frac{dz}{z^2-5z+2}$, lorsque cette intégrale est définie.

4. On dit qu'une fonction entière est de *type exponentiel* s'il existe une constante $C > 0$ telle que $f(z) = O(e^{C|z|})$ quand $|z|$ tend vers l'infini. La borne inférieure des nombres C vérifiant cette propriété s'appelle le *type* de la fonction f. Montrer que les fonction $z \mapsto e^z$ et $z \mapsto \sin(z)$ sont de type exponentiel 1.

5. Soit C >0 et soit f une fonction entière de type exponentiel inférieur strict a C. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tels que $|a_n| r^n < A e^{Cr}$ $(r \geq 0)$. En déduire qu'on a $|a_n| = O((Ce/n)^n)$ lorsque n tend vers l'infini.

6. Soit f une fonction entière donnée par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ telle qu'on ait $|a_n| = O((Ce/n)^n)$ lorsque l'entier n tend vers l'infini. Montrer que f est de type exponentiel C.