Université Paris Diderot Analyse complexe – Année 2011-12
L3 mathématiques

Feuille 1

Propriétés algébriques des nombres complexes

1. Représenter graphiquement les racines 3-èmes de l'unité dans $\mathbf{C}$. Donner les parties réelles et imaginaires, ainsi que les modules et arguments de ces racines.

2. Mêmes questions pour les racines 5-èmes de l'unité.

3. Mêmes questions pour les racines 8-èmes de l'unité.

4. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^3 - (4-i)z^2 + (7-4i)z - 4 + 3i = 0$, sachant qu'elle admet une racine réelle.

5. Pour quelles valeurs de z dans $\mathbf{C}$ a-t-on $|1+iz| = |1-iz|$?

6. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^3 = (1-i)/4$. On pourra déterminer le module et l'argument des solutions.

7. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^7 + 1 = 0$. Représenter graphiquement les solutions.

8. Posons $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$ avec $ad - bc \neq 0$. Considérons $\phi_M : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ définie par $\phi_M(z) = (az+b)/(cz+d)$ si $z \neq \infty$ et $z \neq -d/c$, $\phi_M(\infty) = a/c$ et $\phi(-d/c) = \infty$ (Lorsque $c = 0$, on pose $\phi_M(\infty) = \infty$). Montrer que ϕ_M est bijective. Montrer que $\phi_M \circ \phi_{M'} = \phi_{MM'}$. Une droite complétée de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est une droite à laquelle on adjoint ∞. Montrer que l'image d'un cercle (resp. d'une droite complétée) par ϕ_M est un cercle ou une droite complétée. Montrer que l'image d'une droite à laquelle on ajoute ∞ est un cercle ou une droite

Propriétés topologiques des nombres complexes

1. Soient $a \in \mathbf{C}$ et r un nombre réel > 0. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$ de centre a et de rayon r est la boule fermée $\bar{B}(a,r)$ de centre a et de rayon r.

2. Montrer que l'ensemble $F = \{iy \in \mathbf{C}/y \in \mathbf{R}, y \leq 0\}$ est fermé dans $\mathbf{C}$.

3. Soient x, $y \in \mathbf{C}$, $x \neq y$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x dans $\mathbf{C}$ et un voisinage W de y dans $\mathbf{C}$ tels que $V \cap W = \emptyset$.

4. Montrer que l'ensemble $\{x + iy \in \mathbf{C}/x, y \in \mathbf{R}, x \neq 0, y \neq 0\}$ est dense dans $\mathbf{C}$.

5. Montrer que l'ensemble $\Omega = \{x + iy \in \mathbf{C}/x, y \in \mathbf{R}, xy > 1, x + y < 4\}$ est ouvert dans $\mathbf{C}$. Le représenter graphiquement.

6. Soit A une partie de $\mathbf{C}$. Montrer que A est dense dans $\mathbf{C}$ si et seulement si $\mathbf{C} - A$ est d'intérieur vide.

7. Soit $B = \{x + iy \in \mathbf{C}/x, y \in \mathbf{R}, 1 < |x| \leq 2, 1 \leq y < 2\}$. Représenter graphiquement B. Déterminer son intérieur et son adhérence.

8. Soient A et B deux parties de $\mathbf{C}$. Montrer qu'on a $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. A-t-on $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$? Que se passe-t-il si on remplace l'intérieur par l'adhérence ?

9. Montrer que $\mathbf{C} - \mathbf{Z}$ est connexe. Montrer que $\{x + iy \in \mathbf{C}/x, y \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}\}$ n'est pas connexe.

10. L'intersection de deux sous-ensembles connexes de $\mathbf{C}$ est-elle connexe ? Qu'en est-il de la réunion de deux ensembles connexes ? Soient A et B deux parties de $\mathbf{C}$. Montrer que si $\bar{A} \cap B$ est non vide, $A \cup B$ est connexe.

11. Quels sont les points isolés des ensembles $\{iy \in \mathbf{C}/y \in \mathbf{Z}\}$, $\{e^{iy} \in \mathbf{C}/y \in \mathbf{Z}\}$, $\{e^{i\pi y/2} \in \mathbf{C}/y \in \mathbf{Z}\}$,$\{i/y \in \mathbf{C}/y \in \mathbf{Z}, y \neq 0\}$, $\{i/y \in \mathbf{C}/y \in \mathbf{Z}, y \neq 0\} \cup \{0\}$? Lesquels des ces ensembles sont compacts ?

12. Montrer que l'application $z \mapsto |z|$ est continue sur $\mathbf{C}$. La fonction $z = re^{i\theta} \mapsto \theta$ est-elle continue sur $\mathbf{C} - 0$ (avec $\theta \in [0, 2\pi[$) ?

13. Soit $D = \{x + iy \in \mathbf{C}/x, y \in \mathbf{R}, x \neq 0, y \neq 0\}$. Montrer que cet ensemble est dense dans $\mathbf{C}$. Posons f: $D \to \mathbf{R}$ donnée par $f(x + iy) = (\sin(x) - \sin(x)\cos(y))/xy^2$. Montrer que f se prolonge par continuité à $\mathbf{C}$. Ce prolongement est-il unique ?

14. Soit K une partie compacte de $\mathbf{C}$. Soit F une partie fermée de $\mathbf{K}$. Montrer que F est une partie compacte de K et de $\mathbf{C}$. Montrer que si F est de plus une partie discrète, F est une partie finie.

15. Représenter graphiquement l'ensemble $\cup_{a,b \in \{1,i,-1,-i\}, a \neq b}(B(a, 1) \cap B(b, 1))$. Combien a-t-il de composantes connexes ?

Convergence

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes. Notons x_n et y_n respectivement les parties réelles et imaginaires de u_n. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge si et seulement si les suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ convergent.

2. Montrer que la suite $(z^n)_{n \geq 0}$ converge sur $B(0, 1) \cup \{1\}$. La convergence est-elle uniforme ? Est-elle uniforme sur $B(0, 1/2)$?

3. La série $\sum_{n \geq 0} z/(1 + |z|^2 n^2)$ converge-t-elle pour $z \in \mathbf{C}$? Converge-t-elle uniformément ?

4. La série $\sum_{n \geq 0} 1/(z + n)^2$ converge-t-elle pour $z \in \mathbf{C}$? Converge-t-elle uniformément là où elle est définie ? Converge-t-elle uniformément sur tout compact là où elle est définie ?

5. Soit $k \in \mathbf{R}$, $0 < k < 1$. Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une application k-contractante (*i.e.* on a $|f(z_2) - f(z_1)| < k|z_2 - z_1|$, pour tout z_1, $z_2 \in \mathbf{C}$). Montrer que f a au plus un point fixe. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$. On définit la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ par récurrence en posant $z_{n+1} = f(z_n)$. Montrer qu'elle est de Cauchy. En déduire que f admet un unique point fixe dans $\mathbf{C}$.

Séries entières

1. Posons $f(z) = 1/(1 - z)$ ($z \in \mathbf{C}$, $z \neq 1$). Donner le développement en série entière de $f(z)$ en $z = 0$. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$, $z_0 \neq 1$. Donner le développement en $z = z_0$ et donner le rayon de convergence de la série. Supposons que $z_0 = 0$. Existe-t-il $z \in \mathbf{C}$, $|z| = 1$ tel que cette série converge en z ? La série converge-t-elle pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|z| = 1$?

2. Considérons la série entière $\sum_{n \geq 1} z^n/n$. Quel est son rayon de convergence ? Existe-t-il $z \in \mathbf{C}$, $|z| = 1$ tel que cette série converge en z ? La série converge-t-elle pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|z| = 1$?

3. Même questions pour la série $\sum_{n \geq 1} z^n/n^2$.

4. Donner le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 0} n! z^n$ et $\sum_{n \geq 0} z^n/n^n$.

5. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée de nombres complexes. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$ est ≥ 1.

6. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes vérifiant $|u_n| \leq n^{1000}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$ est ≥ 1.

7. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \mathrm{ch}(n) z^n/n$.

8. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0}[(n^2 - 5n + 1)/(n^2 - 4n + 2)]^{n^2} z^n$.

9. Soit x un nombre réel > 0 qui n'est pas un nombre décimal. Notons a_0 sa partie entière et, pour tout entier $n \geq 1$, a_n sa n-ème décimale. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$?

10. La série $\sum_{n \geq 0} z^n/n^n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbf{C}$?