Université Paris 7-Denis Diderot
Maîtrise de mathématiques et informatique

Algèbre
Année 2003-04
L. Merel - P. Perrin

EXAMEN du 29 janvier 2004

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Soit k un corps. On considère le corps $k(X)$ formé par les fractions rationnelles en X. Pour $F = U/V \in k(X)$, où U et V sont des polynômes non nuls et premiers entre eux de $k[X]$, on appelle *degré* de F le maximum des degrés de U et V.

I

1. L'extension $k(X)|k$ est-elle algébrique ? Est-elle finie ? Montrer que les automorphismes de corps de $k(X)$ au dessus de k forment un groupe, qu'on notera G.
2. Soit $Y \in k(X)$. Montrer que l'application $\sigma_Y : k(X) \to k(X)$ qui à F associe $F(Y)$ est un homomorphisme d'anneaux, dont l'image notée $k(Y)$ est un sous-corps de $k(X)$ qui contient k.
3. Supposons que $Y = U/V \notin k$, de degré d, avec U, $V \in k[X]$ polynômes premiers entre eux. Posons $S = U(T) - V(T)Y \in k(Y)[T]$ (c'est un polynôme en T à coefficients dans le corps $k(Y)$). Quel est le degré de S (comme polynôme en T) ? Montrer que X est un zéro de S. En déduire que l'extension $k(X)|k(Y)$ est finie de degré $\leq d$.
4. Supposons que le degré de Y soit > 1. Montrer que $X \notin k(Y)$. *(Suggérons la méthode suivante : montrer que $K(Y) = K(1/Y)$, ce qui permet de poser $Y = U/V$ avec degré de U supérieur ou égal au degré de V, poser $X = F(U/V)$ avec $F \in k(X)$, et considérer les zéros du polynôme $X - F(0)$ dans une clôture algébrique $\bar{k}$ de k.)* En déduire que l'extension $k(X)|k(Y)$ est de degré > 1.
5. Supposons que $k = \mathbf{R}$ et posons $Y = X^2 + 1$. Quel est le degré de l'extension $k(X)|k(Y)$? Est-elle galoisienne ? L'extension $k(X)|k(Y)$ est-elle galoisienne lorsque $k = \mathbf{R}$ et $Y = X^3 + 1$?
6. Montrer que σ_Y est un automorphisme de $k(X)$ si et seulement si le degré de Y vaut 1. Montrer qu'alors σ_Y est au-dessus k.
7. Montrer qu'on a un homomorphisme surjectif de groupes $\phi : GL_2(k) \mapsto G$ qui à la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ associe l'automorphisme $\sigma_{(aX+b)/(cX+d)}$. Quel est le noyau de cet homomorphisme ?
8. Montrer que $G_0 = \{\sigma_{X+b}/b \in k\}$ est un sous-groupe de G.

II

On reprend les notations de **I** en supposant que k est un corps fini, dont on notera q le nombre d'éléments et p la caractéristique. Posons $q = p^n$ et $k = \mathbf{F}_q$.

1. Rappeler quel est l'ordre du groupe $GL_2(k)$. En déduire l'ordre de G.
2. Quel est l'ordre des p-sous-groupes de Sylow de G ? Donner explicitement un tel sous-groupe.
3. Quel est le groupe de Galois H de l'extension $\mathbf{F}_q|\mathbf{F}_p$?
4. Soit G' le groupe des automorphismes de $k(X)$ au dessus de $\mathbf{F}_p$. Démontrer que la restriction à $\mathbf{F}_q$ définit un homomorphisme de groupes $G' \to H$ de noyau G.
5. Quelles sont les relations d'inclusion entre $k(X)$, $k(X)^{G_0}$ et $k(X)^G$?
6. Démontrer que pour tout $F \in k(X)$, on a $F(X)^q = F(X^q)$ et que $X^q - X \in k(X)^{G_0}$.
7. Posons $Y_1 = (X^{q^2} - X)^{q+1}/(X^q - X)^{q^2+1} \in k(X)$. Démontrer que $Y_1 \in k(X)^G$.