EXAMEN du 18 janvier 2005

Durée : **3h**

Exercice 1

Soit K un corps quadratique, c'est-à-dire une extension de degré 2 de $\mathbf{Q}$. Soit L une extension abélienne finie de K, galoisienne sur $\mathbf{Q}$. Posons $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ et $H = \mathrm{Gal}(L/K)$.

Soit $\chi : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathbf{C}^*$ un caractère. Notons σ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$. Soit $\tilde{\sigma}$ un automorphisme de L qui prolonge σ.

1. Montrer qu'on a un homomorphisme de groupes $\chi' : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathbf{C}^*$ qui à γ associe $\chi(\tilde{\sigma}\gamma\tilde{\sigma}^{-1})$.

2. Démonter que χ est distinct de χ' si et seulement si χ ne se factorise pas par $\mathrm{Gal}(L'/K)$, où $L'/\mathbf{Q}$ est une extension abélienne.

On suppose désormais que χ et χ' sont distincts. Soit V l'espace vectoriel complexe de base $B = (e_1, e_\sigma)$. Considérons l'application $\rho : \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}(V)$ qui à τ associe l'automorphisme de matrice (dans la base B) $\begin{pmatrix} \chi(\tau) & 0 \\ 0 & \chi'(\tau) \end{pmatrix}$ si $\tau \in H$ et $\begin{pmatrix} 0 & \chi(\tau\tilde{\sigma}^{-1}) \\ \chi'(\tau\tilde{\sigma}) & 0 \end{pmatrix}$ si $\tau \notin H$.

3. Démontrer que ρ est l'induite de χ de H à G (où χ est vu comme $H \to \mathbf{C}^* = \mathrm{GL}(\mathbf{C}e_1)$).
4. Démontrer que $\det(\rho)$ (*i.e.* ρ composé avec l'application déterminant) est un caractère $G \to \mathbf{C}^*$. On dit que ρ est *impaire* si $\det(\rho(c)) = -1$, où c est une conjugaison complexe dans G.
5. Démontrer que ρ est impaire si et seulement si (a) K est imaginaire ou si (b) K est réel et $\chi(c) \neq \chi'(c)$.
6. Soit p un nombre premier. Rappelons que le facteur d'Euler en p de la fonction L d'Artin de ρ est donné par la formule suivante :

$$L_p(\rho, s) = (\det(1 - \rho(\mathrm{Frob}_\mathcal{Q})p^{-s}, V^{I_\mathcal{Q}}))^{-1},$$

où $s \in \mathbf{C}$, $\mathcal{Q}$ est une place de L au dessus de p, $I_\mathcal{Q}$ est le sous-groupe d'inertie de G en $\mathcal{Q}$, $\mathrm{Frob}_\mathcal{Q}$ est la substitution de Frobenius dans $G/I_\mathcal{Q}$ et $V^{I_\mathcal{Q}}$ est le sous-espace de V formé par les éléments invariants par $I_\mathcal{Q}$; le déterminant de l'endomorphisme $1 - \rho(\mathrm{Frob}_\mathcal{Q})p^{-s}$ est pris sur le sous-espace de V formé par les éléments fixés par $I_\mathcal{Q}$.

Suivant que p est inerte, décomposé ou ramifié dans K, écrire explicitement $L_p(\rho, s)$ comme une fraction rationnelle en p^s.
7. Démontrer qu'on a $L_p(\rho, s) = \prod_\mathcal{P} L_\mathcal{P}(\chi, s)$, où $\mathcal{P}$ parcourt les places de K au dessus de p, et où $L_\mathcal{P}(\chi, s)$ est le facteur d'Euler en $\mathcal{P}$ de la fonction L d'Artin de χ.

Exercice 2

On rappelle que le groupe topologique $\hat{\mathbf{Z}}$ est la limite projective des groupes $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ et qu'il s'identifie à $\prod_p \mathbf{Z}_p$ où p parcourt les nombres premiers. Posons $V = \hat{\mathbf{Z}} \times \mathbf{R}$, que l'on munit de la topologie produit. On identifie $\mathbf{Z}$ à un sous-groupe de V par $n \mapsto (n, n)$.

On dit qu'un groupe $(A, +)$ est *infiniment* (resp. *uniquement*) *divisible* si pour tout $a \in A$ et tout entier $n > 0$ il existe (resp. il existe au plus un) $b \in A$ tel que $nb = a$.

Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}$. Notons $\mathcal{O}$ son anneau des entiers. Notons r_1 et r_2 le nombres de places réelles et complexes non réelles respectivement. Posons $r = r_1 + r_2 - 1$. Notons $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{A}_K^*$ l'anneau des adèles et le groupe des idèles de K respectivement. Notons $\mathbf{A}_K^*/K^*$ le groupe des classes d'idèles de K et $\mathbf{A}_K^{*0}$ le groupe des idèles de valeur absolue 1.

Pour v place finie de K, on note K_v le complété correspondant de K, $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de K_v, $\mathcal{P}_v$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_v$ et q_v le cardinal du corps résiduel $\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v$.

1. Soit v une place finie de K. Notons p la caractéristique du corps $\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v$. Soit $u \in \mathcal{O}^*$ d'image u_v dans $\mathcal{O}_v$.
1.a. Démontrer que $u_v^{(q_v-1)} \in 1 + \mathcal{P}_v$.
1.b. Démontrer que $u_v^{(q_v-1)p^k}$ tend vers 1 lorsque l'entier k tend vers $+\infty$.
1.c. En déduire que l'application $\exp_u : \mathbf{Z} \to \mathcal{O}^*$ qui à n associe u^n se prolonge par continuité en un homomorphisme de groupes $\hat{\mathbf{Z}} \to \mathcal{O}_v^*$, que l'on notera encore $n \mapsto u^n$.

2. Soit $u \in \mathcal{O}^*$ tel que l'image u_v de u dans K_v ne soit pas un nombre réel < 0 pour toute place infinie v de K. Considérons la détermination principale log du logarithme sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_-$. Pour v place infinie de K, considérons le prolongement de $\exp_u$ en une application continue $\mathbf{R} \to K_v^*$ qui à t associe $e^{\log(u_v)t}$.
2.a. En déduire que l'application $\exp_u$ se prolonge en un homomorphisme continu de groupes $\mathrm{Exp}_u : V \to \mathbf{A}_K^*$ dont la restriction à $\hat{\mathbf{Z}}$ (resp. à $\mathbf{R}$) composée avec la surjection vers K_v^*, pour v place finie (resp. infinie) de K, induit l'application définie ci-dessus.

3.a. Démontrer que $\mathbf{Z}$ est un sous-groupe fermé de V. On munit $V/\mathbf{Z}$ de la topologie quotient.
3.b. Démontrer que $[0, 1[\times\hat{\mathbf{Z}}$ est un système de représentants de V modulo $\mathbf{Z}$.
3.c. En déduire que $V/\mathbf{Z}$ est un groupe compact, connexe et infiniment et uniquement divisible.
3.d. Montrer que le groupe topologique $V/\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathbf{A}_\mathbf{Q}/\mathbf{Q}$.

4. Soient u_1, $u_2 ... u_r$ des unités de K engendrant un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{O}^*$. Notons v_1, $v_2 ... v_{r_2}$ les places infinies non réelles de K. Pour $t \in \mathbf{R}$ et v une place infinie non réelle, notons $e_v^{2i\pi t}$ l'idèle dont toutes les composantes sont égales à 1 sauf celle correspondant à la place v qui vaut $e^{2i\pi t}$.
4.a. Démontrer qu'on peut trouver ces unités de telle sorte qu'aucune ne se trouve dans $\mathbf{R}_-$ via un quelconque plongement $K \to \mathbf{C}$. C'est ce que nous supposerons désormais.
4.b. Considérons l'application $\phi : V^r \times \mathbf{R}^{r_2} \to \mathbf{A}_K^*$ qui à $(x_1, ..., x_r, t_1 ... t_{r_2})$ associe l'idèle $\mathrm{Exp}_{u_1}(x_1) ... \mathrm{Exp}_{u_r}(x_r) e_{v_1}^{2i\pi t_1} ... e_{v_{r_2}}^{2i\pi t_{r_2}}$. Démontrer que l'image de ϕ est contenue dans $\mathbf{A}_K^{*0}$.
4.c. Démontrer que l'image réciproque de K^* par ϕ est $\mathbf{Z}^r \times \mathbf{Z}^{r_2}$. En déduire que ϕ est continue.
4.d. En déduire que l'image D_0 de ϕ dans $\mathbf{A}_K^*/K^*$ est compacte, connexe et infiniment divisible.
4.e. Démontrer que toute classe d'idèle de valeur absolue 1 et infiniment divisible est dans D_0.

5. En déduire que D_0 est la composante neutre du groupe $\mathbf{A}_K^{*0}/K^*$.