Université Paris 7 – Denis Diderot
M2 Mathématiques fondamentales
M. Dimitrov – L. Merel

Année 2008-09
Introduction aux formes automorphes

EXAMEN du 8 janvier 2009

Durée : **3h**

I

Soit M un entier > 0, de décomposion en produit de facteurs premiers donnée ainsi $M = \prod_p p^{m_p}$.

Pour p nombre premier, on note U_{p,m_p} le sous-groupe de $\mathbf{Z}_p^*$ formé par les élément congru à 1 modulo p^{m_p}. On note U_M le sous-groupe de $\hat{\mathbf{Z}}^* \simeq \prod_p \mathbf{Z}_p^*$ donné par $U_M = \prod_p U_{p,m_p}$, où le produit porte sur les nombres premiers.

On note $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^*$ l'anneau des adèle et le groupe des idèles de $\mathbf{Q}$ respectivement. On identifie $\mathbf{Q}$ à un sous-anneau de $\mathbf{A}$ par le plongement diagonal. Pour p nombre premier, on identifie $\mathbf{Q}_p$ (resp. $\mathbf{R}$) au sous-anneau formé par la composante p-adique (resp. réelle) de $\mathbf{A}$. Cela permet d'identifier $\hat{\mathbf{Z}}^*$ à un sous-anneau de $\mathbf{A}$. Le groupe des classe d'idèles de rayon M est par définition $\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*(U_M \times {\mathbf{R}_+}^*)$.

Soit χ un caractère de Dirichlet primitif de niveau M. On pose $G_\chi = \sum_{a=0}^{M-1} \chi(a) e^{2i\pi a/M}$ (somme de Gauss).

1. Soit p un nombre premier. Quel est l'indice de U_{p,m_p} dans $\mathbf{Z}_p^*$?
2. Quel est l'indice de U_M dans $\hat{\mathbf{Z}}^*$?
3. À quelle condition sur le nombre premier p l'image de $\mathbf{Z}_p^*$ dans $\hat{\mathbf{Z}}^*/U_M$ est-elle triviale ?
4. Rappeler comment on identifie $\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*(U_M \times {\mathbf{R}^*}_+)$ à $(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^*$.
5. Soit χ_0 le caractère de $\mathbf{A}^*$ déduit de l'identification rappelée en 4. Soit p un nombre premier. Montrer que la restriction χ_p de χ_0 à $\mathbf{Z}_p^*$ est triviale si et seulement si $m_p = 0$.
6. Récrire G_χ comme un produit portant sur les nombres premiers, dont le p-ème facteur ne dépend que de χ_p.

II

Notons Δ l'unique forme modulaire parabolique normalisée de poids 12 pour le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Son q-développement s'écrit

$$\Delta(\tau) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n,$$

où $q = e^{2i\pi\tau}$. On pose, pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ de déterminant > 0,

$$\Delta_{|g}(\tau) = (ad-bc)^6(c\tau+d)^{-12}\Delta(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}).$$

On pose $\Gamma_1(M^2) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/c \equiv 0 \pmod{M^2}, a \equiv d \equiv 1 \pmod{M^2}\}$. On note Δ_χ la fonction de la variable τ dans le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$ donnée par le q-développement suivant : $\Delta_\chi(\tau) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \chi(n)\tau(n)q^n$. On pose de plus $L(\Delta_\chi, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau(n)\chi(n)n^{-s}$ pour $s \in \mathbf{C}$, lorsque cette série de Dirichlet converge. On pose de plus $\Lambda(\Delta_\chi, s) = L(\Delta_\chi, s)M^s(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$.

1. Soit $u \in \mathbf{Z}$. Posons $g_{u/M} = \begin{pmatrix} 1 & u/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$. Soit $h \in \Gamma_1(M^2)$. Montrer que $g_{u/M} h g_{u/M}^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. En déduire que $\Delta_{|g_{u/M}}$ est une forme modulaire de poids 12 pour le groupe $\Gamma_1(M^2)$.
2. Montrer qu'on a

$$\Delta_\chi(\tau) = \chi(-1)\frac{G_\chi}{M}\sum_{u=0}^{M-1} \bar{\chi}(u)\Delta_{|g_{u/M}}.$$

En déduire que Δ_χ est modulaire de poids 12 pour $\Gamma_1(M^2)$.
3. Posons $W_{M^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -M^2 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $u \in \mathbf{Z}$. Montrer qu'il existe $v \in \mathbf{Z}$ avec $uv \equiv -1 \pmod M$ tel que $g_{u/M} W_{M^2} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) g_{v/M} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$. En déduire que $\Delta_{\chi|W_{M^2}} = \frac{G_{\bar{\chi}}}{G_\chi}\Delta_{\bar{\chi}}$.
4. Montrer que la série $L(\Delta_\chi, s)$ converge absolument pour s de partie réelle assez grande. Exprimer $\Lambda(\Delta_\chi, s)$ comme une transformée de Mellin. En déduire que la fonction $s \mapsto L(\Delta_\chi, s)$ admet un prolongement analytique. Donner l'équation fonctionnelle qui relie $L(\Delta_\chi, s)$ et $L(\Delta_{\bar{\chi}}, 12 - s)$.
5. Soit n un entier ≥ 0 premier à M. Notons T_n le n-ème opérateur de Hecke opérant sur l'espace des formes modulaires de poids 12 pour $\Gamma_1(M^2)$. Montrer que $T_n\Delta_\chi = \tau(n)\chi(n)\Delta_\chi$.
6. On admettra que Δ_χ est nouvelle et parabolique. Est-elle alors une forme primitive ?

III

Soit F_Δ l'unique fonction $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ associée à Δ. Plus précisément, on a $F\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Delta(x+iy)$, F est $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$-invariante à gauche, $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}})$-invariante à droite et vérifie $F(g\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}) = e^{12i\theta}F(g)$.

1. Considérons la fonction $F_{\Delta_\chi} : \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ associée à Δ_χ de façon analogue. Donner la formule qui permet de déduire directement F_{Δ_χ} de F_Δ.
2. Donner un sous-groupe compact K de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}})$ tel que F_{Δ_χ} est invariante par K à droite.