Université Paris 7 – Denis Diderot
M2 Mathématiques fondamentales
M. Dimitrov – L. Merel

Année 2008-09
Introduction aux formes automorphes

EXAMEN du 4 novembre 2008

Durée : **2h**

Notons M_{16} et S_{16} les $\mathbf{C}$-espaces vectoriels formés respectivement par les formes modulaires et les formes modulaires paraboliques de poids 16. Pour k entier pair ≥ 4 et $\tau \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Im}(\tau) > 0$, on rappelle la formule qui donne la k-ème série d'Eisenstein :

$$E_k(\tau) = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

où $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n, n>0} d^{k-1}$, $q = e^{2i\pi\tau}$ et B_k est le k-ème nombre de Bernoulli (on a $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$, $B_{10} = 5/66$, $B_{12} = -691/2730$, $B_{14} = 7/6$, $B_{16} = -3617/510...$).

On rappelle la formule :

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}.$$

Pour n entier ≥ 1, on note T_n le n-ème opérateur de Hecke agissant sur M_{16}. On note $\mathbf{T}$ le sous-anneau de $\mathrm{End}(M_{16})$ engendré par les opérateurs de Hecke.

1. Donner les dimensions de M_{16} et S_{16} en justifiant brièvement.
2. Considérons la famille suivante d'éléments de M_{16} : E_4^4, $E_6^2 E_4$, $E_8 E_4^2$, E_8^2, $E_{10} E_6$, $E_{12} E_4$, E_{16}. Montrer qu'elle est génératrice. En extraire une base et exprimer les éléments de la famille comme combinaison linéaire de cette base.
3. Donner une combinaison linéaire F de ces formes modulaires qui est parabolique et normalisée (*i.e.* dont le q-développement est de la forme $q + a_2 q^2 + ...$). Montrer que les coefficients du q-développement de F sont entiers. À quoi est égal F/Δ ?
4. Donner une base de M_{16} formée de vecteurs propres pour l'opérateur de Hecke T_2. Montrer que les q-développements correspondants sont à coeffficients entiers.
5. Quelles sont les valeurs propres de T_2 ?
6. Soit $f \in M_{16}$ un vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke. Pour $t \in \mathbf{T}$, on pose $t(f) = a(t) f$. Montrer que $t \mapsto a(t)$ est un homomorphisme d'anneaux. En déduire un homomorphisme injectif d'anneaux $\Psi : \mathbf{T} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.
7. Montrer qu'il existe un élément de S_{16} de q-développement $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ avec $a_n \in \mathbf{Z}$ et $a_n \equiv \sigma_{15}(n) \pmod{3617}$ ($n \in \mathbf{Z}$). Remarque : le nombre 3617 est premier.
8. Montrer que l'image de Ψ est contenue dans $A = \{(u, v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} / u \equiv v \pmod{3617}\}$.
9. L'image de Ψ est-elle égale à A ?
10. Soit p un nombre premier. Considérons $\mathrm{Hom}(\mathbf{T}, \mathbf{F}_p)$. C'est un $\mathbf{T}$-module (via l'action $(t, \phi) \mapsto \phi \circ t$). Montrer qu'il est isomorphe (comme $\mathbf{T}$-module) à $\mathbf{T}/p\mathbf{T}$.