Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques

Géométrie affine et euclidienne
Année 2010-11
F. Liret, L. Merel

Esquisse de corrigé de l'EXAMEN du 13 janvier 2011

Exercice 1

1. Voir figure I annexe. Remarque : il existe deux cercles Γ vérifiant les conditons demandées. Le centre de l'un d'entre eux est intérieur au triangle. Le centre de l'autre est symétrique par rapport à la droite (AB), et se trouve donc à l'extérieur du triangle.
2. Les droites (OA') et (AA') sont toutes deux orthogonales à la tangente en A' à Γ. Elle sont donc parallèles. Commme elles contiennent A', elles sont confondues. Donc les points O, A et A' sont alignés.
3. Comme A' est sur $\mathcal{C}_A$ qui est un cercle de rayon $AC = 1$ et de centre A, on a $AA' = 1$. Par ailleurs, on a $AA' = AO + OA' = AO + r$, puisque A, O et A' sont alignés. On a donc $OA = 1 - r$.
4. Le point O est invariant par la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de $[A, B]$. Les droites (OD) et (AB) sont donc orthogonales. D'après le théorème de Pythagore, on a $OA^2 = OD^2 + DA^2$.
5. On a $DA = 1/2$ et $OD = r$. En combinant avec la relation $OA^2 = OD^2+DA^2$, on obtient $OA^2 = r^2+1/4$. Utilisons maintenant $OA = 1 - r$. On obtient $(1 - r)^2 = r^2 + 1/4$ et donc $r = 3/8$.

Exercice 2

1. Un tel retournement est rotation d'axe $\mathcal{D}$, de mesure π, et d'ensemble de points fixe $\mathcal{D}$.

2. Comme les retournements sont des rotations, il s'agit de déplacements de $\mathcal{E}$. La composée de deux déplacements est un déplacement.

3.a. Le point O est fixe par ρ_1 et ρ_2. Il est donc fixe par $\rho_1 \circ \rho_2$.
3.b. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ passent par O. L'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est donc un sous-espace affine, car elle est non vide. Notons P_1 et P_2 leurs directions respectives. Comme $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes, P_1 et P_2 sont distincts. La somme $P_1 + P_2$ est donc de dimension > 2. C'est nécessairement la direction de $\mathcal{E}$. Utilisons la formule des dimensions $\dim(P_1 \cap P_2) = \dim(P_1) + \dim(P_1) - \dim(P_1 + P_2) = 2 + 2 - 3 = 1$. Cela montre que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ a pour direction une droite, et est donc une droite affine.
3.c. L'image d'un point Q de $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) par ρ_1 (resp. ρ_2) est le symétrique orthogonal de Q par rapport à O. On a donc $\rho_1 \circ \rho_2(Q) = Q$.
3.d. Comme $\rho_1 \circ \rho_2$ est un déplacement admettant une droite de points fixes, c'est une rotation d'axe $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ ou c'est l'identité. Mais l'image d'un point de $\mathcal{D}_2$ distinct de O n'est pas fixe par $\rho_1 \circ \rho_2$. Donc $\rho_1 \circ \rho_2$ est une rotation d'axe $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

4.a. Les applications linéaires associées à ρ_1 et ρ_2 sont toutes deux la symétrie orthogonales par rapport à la direction commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
4.b. Comme les applications linéaires associées à ρ_1 et ρ_2 sont la même symétrie orthogonale, l'application linéaire associée à $\rho_1 \circ \rho_2$ est l'identité. Donc $\rho_1 \circ \rho_2$ est une translation.
4.c. Soit P un point de $\mathcal{P}_2$. On a $\rho_2(P) = P$ et donc $\rho_1 \circ \rho_2(P)$ est le symétrique orthogonal de P par rapport à $\mathcal{D}_1$. Le vecteur $2u$ est donc orthogonal à $\mathcal{D}_1$.
4.d. Comme $\rho_1 \circ \rho_2(P) = P + 2u$ est le symétrique orthogonal de P par rapport à $\mathcal{D}_1$, $P + u$ est le projeté orthogonal de P sur $\mathcal{D}_1$. Donc la droite translatée de $\mathcal{D}_2$ par u est $\mathcal{D}_1$.

5.a. Notons $\mathcal{P}'_1$ (resp. $\mathcal{P}'_2$) le plan affine dont la direction est la somme des directions de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et qui contient $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$). La projection orthogonale π_1 sur $\mathcal{P}'_1$ (resp. π_2 sur $\mathcal{P}'_2$) de $\mathcal{D}_2$ (resp. $\mathcal{D}_1$) est une droite sécante à $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$). Notons Q_1 (resp. Q_2) le point d'intersection. Les points Q_1 et Q_2 sont distincts, puisque $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont non coplanaires. De plus, on a $\pi_1(Q_2) = Q_1$ et $\pi_2(Q_1) = Q_2$. Cela entraîne que la droite (Q_1Q_2) est orthogonale à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
5.b. L'application linéaire associée à $\rho_1 \circ \rho_2$ est la composée de deux isométries de déterminant 1, c'est donc une isométrie de déterminant 1. C'est donc une rotation vectorielle, par définition. Comme les applications

linéaires associées à ρ_1 et ρ_2 agissent toutes deux avec la valeur propre -1 sur la direction de $\mathcal{D}$, l'application linéaire associée à $\rho_1 \circ \rho_2$ agit avec la valeur propre 1 sur la direction de $\mathcal{D}$. Cette dernière est bien un axe de la rotation vectorielle. L'application linéaire associée à $\rho_1 \circ \rho_2$ n'est pas l'identité, sinon les applications linéaires associées à ρ_1 et ρ_2 seraient identiques, ce qui est impossible puisque ce sont des symétries orthogonales par rapport à des droites vectorielles distinctes.
5.c. On a $\rho_2(Q_2) = Q_2$. Comme $\rho_1(Q_2)$ est le symétrique orthogonal de Q_2 par rapport à $\mathcal{D}_1$, c'est aussi le symétrique orthogonal de Q_2 par rapport à Q_1. Les points Q_1, Q_2 et $\rho_1(Q_2)$ sont donc alignés. C'est pourquoi $\rho_1 \circ \rho_2(Q_2) = \rho_1(Q_2)$ appartient à $(Q_1Q_2) = \mathcal{D}$.
5.d. Comme l'application linéaire associée à $\rho_1 \circ \rho_2$ est une rotation, $\rho_1 \circ \rho_2$ est une translation, une rotation ou un vissage. Ce n'est pas une translation puisque l'application linéaire associée à $\rho_1 \circ \rho_2$ n'est pas l'identité. C'est donc une rotation d'axe parallèle à $\mathcal{D}$. Comme $\rho_1 \circ \rho_2(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, c'est un vissage d'axe $\mathcal{D}$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé (O, e_1, e_2). Considérons la conique d'équation $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 10x - 4y = 0$ dans ce repère.
1. La forme quadratique $(x, y) \mapsto 5x^2 + 4xy + 2y^2$ est non dégénérée, de signature $(2, 0)$, car de discriminant $16 - 20 = -4 < 0$. C'est pourquoi la conique est une ellipse.
2. On peut déterminer le centre en cherchant les points où s'annulent les dérivées partielles premières de $(x, y) \mapsto 5x^2+4xy+2y^2-10x-4y$, c'est-à-dire les points de coordonnées (x, y) qui vérifient $10x+4y-10 = 0$ et $4x + 4y - 4 = 0$. Il y a un seul tel point, il pour coordonnées $(1, 0)$. C'est le centre de la conique.

Notons O' le point de coordonnées $(1, 0)$. On peut récrire l'équation de la conique dans le repère (O', e_1, e_2) ainsi : $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 5$.

Considérons la matrice symétrique $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ associée à la forme quadratique $(x, y) \mapsto 5x^2 + 4xy + 2y^2$. Son polynôme caractéristique est $X^2 - 7X + 6 = (X - 1)(X - 6)$. Les vecteurs propres unitaires e'_1 et e'_2 de l'endomorphisme associé ont pour coordonnées $(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ et $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. Ils forment une base orthonormée directe. Les axes de l'ellipse sont les droites qui passent par O' et dirigées par e'_1 et e'_2 respectivement.
3. Puisque e'_1 et e'_2 correspondent aux valeurs propres 1 et 6 respectivement ci-dessus, dans le repère (O', e'_1, e'_2), l'ellipse a pour équation : $x^2 + 6y^2 = 5$, ou encore $\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}y^2 = 1$. Lorsqu'une ellipse a pour équation $\frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{b^2}y^2 = 1$, avec $a > b$, on pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ et les foyer de l'ellipse ont pour coordonnées $(-c, 0)$ et $(c, 0)$. De plus l'excentricité est donnée par la formule : $e = c/a$.

Dans le cas présent, on a $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{\frac{5}{6}}$ et $c = \sqrt{\frac{25}{6}}$. Dans le repère (O', e'_1, e'_2), les foyers ont donc pour coordonnées $(-\sqrt{\frac{25}{6}}, 0)$ et $(\sqrt{\frac{25}{6}}, 0)$. L'excentricité vaut $\sqrt{\frac{5}{6}}$.
4. Voir la figure II annexe.