Université Paris 7-Denis Diderot | Algèbre
Maîtrise de mathématiques et informatique | Année 2004-05
L. Merel - P. Perrin

CORRIGÉ de l'EXAMEN du 27 janvier 2005

I

1. L'irréductibilité de P se voit en appliquant le critère d'Eisenstein pour le nombre premier 2.
2. Le polynôme P est pair (*i.e.* on a $P(X) = P(-X)$), d'où le fait que les racines sont des paires d'opposés. Si $x \in \mathbf{R}$, on a $P(x) = x^4 + 4x^2 + 4 \geq 4 > 0$. C'est pourquoi P n'a pas de racine réelle.
3. On a $(\alpha^2 + 2)^2 = 2$ et donc $\sqrt{2} = \pm(\alpha^2 + 2) \in \mathbf{Q}(\alpha)$.
4. On a $\alpha^2\beta^2 = 2$ et donc $\beta = \pm\sqrt{2}/\alpha \in \mathbf{Q}(\alpha)$.
5. Comme P est irréductible et de degré 4, on a $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] = 4$ et donc $[K : \mathbf{Q}] = 4$.
6. L'extension $K|\mathbf{Q}$ est séparable (car la caractéristique est 0) et normale (car K est de décomposition).
7. L'extension $K|\mathbf{Q}$ est résoluble par radicaux, car engendrée par des racines carrées successives. En effet considérons les extensions composées : $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \subset K$. L'extension $K|\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ est engendrée par α et on a $\alpha^2 = -2 \pm \sqrt{2}$. (On pourrait procéder différemment en montrant que $K|\mathbf{Q}$ est résoluble. En effet G est d'ordre 4 et est donc abélien et donc résoluble. On sait que les extensions résolubles par radicaux coïncident avec les extensions résolubles.)
8. C'est le cas puisque le corps K est engendré par α sur $\mathbf{Q}$.
9. La conjugaison complexe est d'ordre 1 ou 2 dans G. Comme $\alpha \notin \mathbf{R}$, on a $c(\alpha) \neq \alpha$ et donc c est distinct de l'identité et donc c est d'ordre 2.
10. Les éléments de K invariants sous H sont les éléments de K invariants sous c, *i.e.* les nombres réels dans K. On a donc $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) \subset K^H$. Par ailleurs H est d'ordre 2, l'extension $K^H|\mathbf{Q}$ est donc de degré $|G/H| = 2$. Les extensions $K^H|\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{2})|\mathbf{Q}$ ont même degré. On a donc $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = K^H$.
11. Comme G est d'ordre 4, σ est d'ordre 2 ou 4. Remarquons que $c(\alpha) = -\alpha$ et $c(\beta) = -\beta$ et que $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}(\sqrt{2})) = \{1, c\}$. On a $\sigma(\alpha\beta)^2 = \sigma((\alpha\beta)^2) = \sigma(4) = 4 = (\alpha\beta)^2$ et donc $\sigma(\alpha\beta) = \pm\alpha\beta$. Si $\sigma(\alpha\beta) = \alpha\beta$, on a $\sigma(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et donc $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/K^H)$ ce qui entraîne $\sigma = 1$ ou $\sigma = c$.

Si $\sigma(\alpha) = \alpha$, on a $\sigma = 1$. De même, si $\sigma(\beta) = \beta$, on a $\sigma = 1$. Si $\sigma(\alpha) = -\alpha$, on a $\sigma(\beta) = -\beta$ et donc $\sigma = c$, ce qui est absurde. On a donc $\sigma(\alpha) = \beta$ ou $\sigma(\alpha) = -\beta$. Dans le premier cas, on a $\sigma(\beta) = -\alpha$ et donc $\sigma^2(\alpha) = -\alpha$ et donc σ est d'ordre 4.
12. De tels sous-corps coïncident avec les sous-groupes d'indice 2 de G. Or G est cyclique d'ordre 4. Il possède donc un unique sous-groupe d'indice 2. C'est H. Le sous-corps correspondant est $K^H = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$.

II

1. Le cardinal de $\mathcal{S}_{10}$ est $10! = 25.(1.2.3.4.6.7.8.9.2)$. Les 5-sous-groupes de Sylow sont donc d'ordre 25.
2. Il suffit de prendre un sous-groupe de Sylow engendré par deux cycles d'ordre 5 de supports disjoints. Par exemple le groupe engendré par $(1, 2, 3, 4, 5)$ et $(6, 7, 8, 9, 10)$. Un tel groupe est abélien, car un cycle d'ordre 5 engendre un sous-groupe cyclique d'ordre 5 et des cycles de supports disjoints commutent
3. Tous les 5-sous-groupes de Sylow sont conjugués. Les conjugés de deux cycles de supports disjoints sont de supports disjoints. Les 5-sous-groupes de Sylow sont donc caractérisés par les supports complémentaires de 5 éléments. Il y a $C_{10}^5/2 = 10!/2.5!^2 = 126$ façons de décomposer un ensemble à 10 éléments en deux sous-ensembles disjoints à 5 éléments.
4. Les seuls sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_{10}$ sont $\{1\}$, $\mathcal{A}_{10}$ et $\mathcal{S}_{10}$. Aucun d'entre eux n'est un 5-groupe.
5. La signature d'un 5-cycle est 1, de même que la signature d'un produit de 5-cycles. C'est pourquoi, les 5-sous-groupes de Sylow sont contenus dans $\mathcal{A}_{10}$.
6. Considérons le 3-cycle $(1, 2, 3)$. On a $(1, 3, 2, 4, 5)(1, 3, 5, 4, 2) = (1, 2, 3)$. Tous les 3-cycles de $\mathcal{S}_5$ sont conjugués. Soit $\sigma(1, 2, 3)\sigma^{-1}$ un 3-cycle, avec $\sigma \in \mathcal{S}_5$. On a $\sigma(1, 2, 3)\sigma^{-1} = \sigma(1, 3, 2, 4, 5)\sigma^{-1}\sigma(1, 3, 5, 4, 2)\sigma^{-1}$, qui est donc un produit de 5-cycles.
7. Soit ϵ un 3-cycle de $\mathcal{S}_{10}$. Il existe $\sigma \in \mathcal{S}_{10}$ tel que $\sigma(1, 2, 3)\sigma^{-1} = \epsilon$. On a donc, en utilisant le calcul précédent, $\epsilon = \sigma(1, 3, 2, 4, 5)\sigma^{-1}\sigma(1, 3, 5, 4, 2)\sigma^{-1}$, qui est un produit de 5-cycles et est donc produit d'éléments de 5-sous-groupes de Sylow.
8. On sait que le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est engendré par ses 3-cycles lorsque $n \geq 1$. C'est pourquoi $H_5 = \mathcal{A}_{10}$.