Université Paris 7-Denis Diderot
Licence 1ère année

MPQ1
Année 2005-06

Corrigé de l'EXAMEN du 3 janvier 2006

Exercice 1

1. Par définition la continuité en 0 de f s'exprime ainsi :
(H) *Pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que* $|x| < \eta$ *entraîne* $|f(x)| < \epsilon$.

L'assertion (H) est équivalente à (C) (car on a simplement échangé les lettres ϵ et η). Elle est équivalente (B) (il suffit de remplacer ϵ par 2ϵ dans l'assertion (H)). Elle est équivalente à (D) (car (H) entraîne (D) et (D) entraîne (B)). Enfin elle est équivalente à (E) (on remplace η par 2η dans (H)).

Finalement, l'assertion (A) n'est pas équivalente à (H). Considérons la fonction signe f donnée par $f(x) = -1$ si $x < 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$. Elle n'est pas continue en 0 mais vérifie (A) (en prenant $\eta = 2$, par exemple).

2. Voir la fonction signe, qui vient d'être décrite.

Exercice 2

Posons $z = re^{i\theta}$ avec r réel > 0 et $\theta \in \mathbf{R}$. On a $z^4 = r^4 e^{4i\theta}$ et donc $r^4 = 2^{1/4}$ et $\theta = k\pi/2$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Cela donne les modules et arguments possibles pour z. Les quatres valeurs possibles de z sont donc $z_1 = 2^{1/4}(\cos(0) + i\sin(0)) = 2^{1/4}$, $z_2 = 2^{1/4}(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) = i2^{1/4}$, $z_3 = 2^{1/4}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -2^{1/4}$ et $z_4 = 2^{1/4}(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)) = -i2^{1/4}$, où l'on voit les parties réelles et imaginaires.

Exercice 3

1. C'est un calcul direct de produit de matrices. Il suffit d'utiliser la relation $e^t e^{t'} = e^{t+t'}$.
2. Le calcul de $M(0)$ donne la matrice identité. On a donc $M(t)M(-t) = M(t-t) = M(0)$. Donc $M(t)$ est inversible d'inverse $M(-t)$.
3. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$. La relation $f_t(v) = e^t v$ est stable par combinaison linéaire et est satisfaite par le vecteur $v = 0$. On a bien un espace vectoriel F. Les vecteurs e_1 et e_2 sont éléments de F. Donc la dimension de F est au moins 2. Comme F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$, sa dimension est au plus 3. Si cette dimension est 3, on a $F = \mathbf{R}^3$, ce qui est impossible car $e_3 \notin F$. Donc F est de dimension 2. Comme la famille (e_1, e_2) est libre, c'est une base de F.

Exercice 4

1. On a $f(x) \leq |\cos(x)/(1+x^2)| \leq 1/1 \leq 1$. C'est pourquoi f est bornée. La fonction f est obtenue comme fraction rationnelle en x et $\cos(x)$, qui sont des fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$; elle est donc $\mathcal{C}^\infty$ là où elle est définie, c'est-à-dire sur $\mathbf{R}$.
2. La fonction f s'annule là ou la fonction cosinus s'annule. C'est-à-dire sur $\pi/2 + \pi\mathbf{Z}$. En particulier f s'annule en $-\pi/2$, $\pi/2$, $3\pi/2$. D'après le théorème de Rolle, f' s'annule sur chacun des intervalles $]-\pi/2, \pi/2[$ et $]\pi/2, 3\pi/2[$.
3. Soient $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\beta \in]\pi/2, 3\pi/2[$ tels que $f'(\alpha) = 0$ et $f'(\beta) = 0$. Appliquons encore le théorème de Rolle à l'intervalle $]\alpha, \beta[\subset [-2\pi, 2\pi]$. Il existe $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $f''(\gamma) = 0$.

Exercice 5

1. On a $\mathrm{tg}(x) = x + x^3/3 + o(x^4)$.
2. On a, par élévation au carré de la formule qui précède, $\mathrm{tg}(x)^2 = x^2 + 2x^4/3 + o(x^4)$
3. Utilisons le développement donné ci-dessus :

$$\frac{1}{\mathrm{tg}(x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x^2 - 2x^4/3 + o(x^4)}{x^4 + 2x^6/3 + o(x^6)}.$$

En simplifiant par x^4, on obtient

$$\frac{-2/3 + o(1)}{1 - 2x^2/3 + o(x^2)}.$$

Cette dernière quantité tend vers $-2/3$ lorsque x tend vers 0.
4. Les quantité $1/x$ et $1/\mathrm{tg}(x)$ tendent toutes deux vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque $x > 0$ (resp. $x < 0$) tend vers 0. Par conséquent $|1/x + 1/\mathrm{tg}(x)|$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

On a

$$|\frac{1}{\mathrm{tg}(x)} - \frac{1}{x}| = \frac{1/\mathrm{tg}(x)^2 - 1/x^2}{|1/x + 1/\mathrm{tg}(x)|}.$$

Le numérateur de cette dernière expression tend vers $-2/3$ lorsque x tend vers 0. Le dénominateur tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0. Par conséquent, le quotient tend vers 0 lorsque x tend vers 0. On a donc $1/\mathrm{tg}(x) - 1/x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.