Feuille d'exercices numéro 3

☞ **Exercice 1.** **(a)** Donner un exemple d'automorphisme d'un groupe qui ne soit pas un automorphisme intérieur.

Soit G un groupe. On appelle « G-ensemble » un ensemble muni d'une action à gauche de G. Si X et Y sont des G-ensembles, une application $f : X \to Y$ est dite « équivariante » si $\forall_{x\in X}\ \forall_{g\in G}\ f(g.x) = g.f(x)$.

☞ **Exercice 2.** **(a)** Montrer qu'une composition d'applications équivariantes est une application équivariante et que l'application identique de tout G-ensemble est équivariante.

(b) Montrer que si X et Y sont des G-ensembles, $(g,(x,y)) \mapsto (g.x, g.y)$ fait de $X \times Y$ un G-ensemble. Les projections canoniques sont-elles équivariantes ?

(c) Montrer que si X et Y sont des G-ensembles, $(g, f) \mapsto (x \mapsto g.(f(g^{-1}.x)))$ fait de Y^X un G-ensemble.

(d) Montrer que si X et Y sont des G-ensembles, l'application $e : Y^X \times X \to Y$ définie par $(f, x) \mapsto f(x)$ est équivariante.

(e) Soit X un G-ensemble. On suppose que pour toute application équivariante surjective $p : U \to V$ et toute application équivariante $f : X \to V$ il existe une application équivariante $\overline{f} : X \to U$ telle que $p \circ \overline{f} = f$. Montrer que G agit librement sur X.

☞ **Exercice 3.** *Soit G un groupe (multiplicatif) et X un G-ensemble. On considère l'application $\varphi : G \times (G \times X) \to G \times X$ définie par $(g,(h,x)) \mapsto (ghg^{-1}, g.x)$*

(a) Montrer que φ est une action à gauche de G sur $G \times X$.

On considère désormais que G agit sur lui-même à gauche par conjugaison, c'est-à-dire via $(g,h) \mapsto ghg^{-1}$. Les deux projections canonique du produit $G \times X$ sont clairement équivariantes. On pose $Z = \{(g,x) \in G \times X \mid g.x = x\}$.

(b) Montrer que Z est stable par l'action de G sur $G \times X$.

On pose $Y = \{(g,x) \in Z \mid g \neq 1\}$. On suppose maintenant que G est fini et que pour tout $g \in G$ distinct de 1, l'ensemble $\mathrm{Fix}_g(X)$ des points de X laissés fixes par g est fini. Soit $O \subset X$ tel que toute orbite de l'action de G sur X ait un unique point dans O.

(c) Montrer que :

$$\sum_{g\neq 1} |\mathrm{Fix}_g(X)| = \sum_{x\in O} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(x)|}(|\mathrm{Stab}(x)| - 1)$$

On pose $P = \{x \in X \mid \exists_{g\neq 1}\ g.x = x\}$. Les points de P seront appelés des « pôles ».

(d) Montrer que P est fini et stable par l'action de G.

On suppose maintenant que G est un sous-groupe (fini) de $\mathrm{SO}(3)$ et que X est la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$. On pose $n = |G|$, $r = |P \cap O|$, et pour tout $x \in P$, on pose $n_x = |\mathrm{Stab}(x)|$.

(e) Montrer que :

$$2 - \frac{2}{n} = r - \sum_{x\in P\cap O} \frac{1}{n_x}$$

(f) Montrer que pour tout $x \in P$, $n_x \geq 2$, et en déduire que $r = 2$ ou $r = 3$.

(g) Montrer que si $r = 2$, G est cyclique.

On suppose désormais que $r = 3$, on note x_1, x_2 et x_3 les éléments de $P \cap O$, et on pose $n_1 = n_{x_1}$, $n_2 = n_{x_2}$, $n_3 = n_{x_3}$. On peut supposer que $n_1 \leq n_2 \leq n_3$.

(h) Montrer que les valeurs possibles pour le triplet (n_1, n_2, n_3) sont parmi les suivantes :

$(2,2,k)$	avec $n = 2k$ et $k \geq 2$ quelconque
$(2,3,3)$	avec $n = 12$
$(2,3,4)$	avec $n = 24$
$(2,3,5)$	avec $n = 60$

☞ **Exercice 4.** *Soit X un G-ensemble. On note $\mathscr{P}_G(X)$ l'ensemble des parties de X qui sont globalement stables sous l'action de G.*

(a) Montrer que toute application $f : \mathscr{P}_G(X) \to \mathscr{P}_G(X)$ croissante (pour la relation d'inclusion) a un point fixe. (Aide : Considérer la réunion de tous les éléments A de $\mathscr{P}_G(X)$ tels que $A \subset f(A)$.)

Soit Y un autre G-ensemble, et soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ des injections équivariantes.

(b) Montrer qu'il existe une bijection équivariante entre X et Y. (Aide : Considérer l'application $A \mapsto X - g(Y - f(A))$ de $\mathscr{P}_G(X)$ vers lui-même.)

Solutions des exercices de la feuille 3

☞ **Exercice 1.** **(a)** C'est le cas de tout automorphisme non trivial d'un groupe commutatif, puisqu'un automorphisme intérieur d'un groupe commutatif est nécessairement trivial. On prend par exemple $x \mapsto -x$ pour $\mathbb{Z}$.

☞ **Exercice 2.** Les questions **(a)** et **(b)** sont triviales (et les projections canoniques sont équivariantes).

(c) On a $(gh).f = (x \mapsto gh.(f(h^{-1}g^{-1}.x))) = g.((h.f)(g^{-1}.x)) = g.(h.f)$ et $1.f = (x \mapsto 1.(f(1.x)) = f$.

(d) On a :

$$\begin{array}{rcl} e(g.f, g.x) & = & (g.f)(g.x) \\ & = & g.(f(g^{-1}.g.x)) \\ & = & g.f(x) \\ & = & g.e(f, x) \end{array}$$

(e) Considérons le produit $G \times X$ sur lequel G agit par $(g, (h, x)) \mapsto (gh, g.x)$. Cette action est libre, car si $(gh, g.x) = (h, x)$, on a $gh = h$, donc $g = 1$. La seconde projection $p_2 : G \times X \to X$ est équivariante et surjective. Il existe donc $s : X \to G \times X$ équivariante, telle que $p_2 \circ s = 1_X$. Soit $x \in X$. L'application s envoie l'orbite de x dans une orbite de $G \times X$. S'il existait $g \in G$ tel que $g.x = x$, on aurait $g.s(x) = s(x)$. Mais cette dernière égalité entraîne $g = 1$, puisque G agit librement sur $G \times X$. L'action de G sur X est donc libre.

☞ **Exercice 3.** **(a)** G agit sur chacun des facteurs G et X du produit $G \times X$. Il s'agit donc d'une action d'après la question **(b)** de l'exercice précédent, et les projections canoniques sont équivariantes.

(b) Soit (g, x) tel que $g.x = x$. Alors $h.(g, x) = (hgh^{-1}, hx)$, et $(hgh^{-1}).(h.x) = (hgh^{-1}h).x = (hg).x = h.(g.x) = h.x$, ce qui montre que $h.(g, x) \in Z$.

Remarquons que l'ensemble O de l'énoncé existe bien. Il suffit en effet de choisir un point dans chaque orbite.

(c) Il suffit de compter les éléments de Y de deux façons. Pour $g \in G$, $g \neq 1$, donné, les $x \in X$ tels que $g.x = x$ sont les éléments laissés fixes par g. Ils sont donc au nombre de $|\operatorname{Fix}_g(X)|$, et on a :

$$|Y| = \sum_{g \neq 1} |\operatorname{Fix}_g(X)|$$

Par ailleurs, pour $x \in X$ donné, l'ensemble des $g \neq 1$ tels que $g.x = x$, c'est-à-dire l'ensemble des couples de la forme (g, x) de Y, a pour cardinal $|\operatorname{Stab}(x)| - 1$. Comme $|\operatorname{Stab}(x)|$ ne dépend que de l'obite de x et non pas de x lui-même, la réunion de ces ensembles pour tous les éléments de l'orbite de x a pour cardinal $|\operatorname{Orb}(x)|(|\operatorname{Stab}(x)| - 1)$, ou encore :

$$\frac{|G|}{|\operatorname{Stab}(x)|}(|\operatorname{Stab}(x)| - 1)$$

La formule de l'énoncé en résulte immédiatement.

(d) P est donc l'ensemble des points de X qui sont laissés fixes par au moins un élément non trivial (différent de 1) de G. C'est donc la réunion des $\operatorname{Fix}_g(X)$ pour $g \neq 1$. Or G étant fini, de même que chaque $Fix_g(X)$, P est fini. Par ailleurs, si $x \in P$ et $g \in G$, alors il existe $h \in G - \{1\}$ laissant x fixe, et on a :

$$(ghg^{-1}).(g.x) = (gh).x = g.(h.x) = g.x$$

et on voit que $g.x$ est laissé fixe par ghg^{-1} qui est distincts de 1 comme image de h, lui-même distinct de 1, par un automorphisme intérieur. Il en résulte que P est stable sous l'action de G.

(e) Pour pouvoir appliquer les questions précédentes, il faut d'abord vérifier que pour tout $g \neq 1$ dans G, l'ensemble des points de la sphère $\mathbb{S}^2$ laissés fixes par g est fini. En fait, il est non seulement fini, mais toujours de cardinal 2. En effet, une rotation de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas l'identité a un axe, et parmi les points de $\mathbb{S}^2$, seuls les deux qui sont sur cet axe sont fixes par cette rotation.

On voit donc que chaque $|\operatorname{Fix}_g(P)|$ vaut 2 et que le membre de gauche de la formule de la question **(c)** vaut $2(n-1)$. Quant au membre de droite, il vaut :

$$\sum_{x \in O} \frac{n}{n_x}(n_x - 1)$$

et une division par n (qui n'est pas nul) donne la formule demandée.

(f) Tout $x \in P$ étant laissé stable par au moins un élément de G autre que 1, $\operatorname{Stab}(s)$ a au moins deux éléments et on a $n_x \geq 2$.

Dès lors, la somme dans le membre de droite de la formule de la question **(e)** vaut au plus $r/2$, et le memebre de droite de cette formule vaut donc au moins $r/2$. On a donc :

$$2 - \frac{2}{n} \geq \frac{r}{2}$$

On a donc $r \leq 4 - (4/n) < 4$. Par ailleurs, r ne peut pas être 1, car on aurait :

$$2 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{1}{n_x}$$

(où x est alors l'unique élément de $P \cap O$), ce qui est impossible car le membre de gauche vaut au moins 1. On a donc $r = 2$ ou $r = 3$.

(g) Si $r = 2$, les pôles sont répartis en deux orbites sous l'action de G. On a donc :

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$$

où n_1 et n_2 sont les cardinaux des stabilisateurs pour ces deux orbites. Comme $n_i \leq n$, on doit avoir $n = n_1 = n_2$. Il y a donc deux pôles tous les deux fixes sous l'action de G, ce qui fait que G ne peut être qu'un sous-groupe du groupe des rotations autour de l'axe passant par ces deux pôles, donc isomorphe à un sous-groupe fini du groupe des rotations vectorielles du plan. Un tel sous-groupe est cyclique.

(h) La formule de la question **(e)** devient dans ce cas :

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{n}$$

Le membre de droite de cette égalité est strictement plus grand que 1. Si n_1 valait au moins 3, le membre de gauche vaudrait au plus 1, ce qui est imposible. On a donc $n_1 = 2$ (rappelons que $n_i \geq 2$ d'après la question **(f)**). De même, si $n_2 \geq 4$, le mebre de gauche vaudrait au plus 1. On a donc $n_2 = 2$ ou $n_2 = 3$.

Dans le cas où $n_2 = 2$, on a $n_3 = n/2$, ce qui donne le triplet $(2, 2, k)$ avec $k = n/2$, et $k \geq 2$ car $k = 1$, G n'a que deux éléments et est donc composé de l'identité et d'une rotation d'angle π, et dans ce cas il n'y a que deux pôles (les deux points de $\mathbb{S}^2$ qui sont sur cet axe), qui sont fixes par l'action de G, et on est dans le cas $r = 2$.

Dans le cas $n_2 = 3$, on a :

$$\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{n} = \frac{1 + \frac{12}{n}}{6} > \frac{1}{6}$$

On a donc $n_3 < 6$, et les valeurs possibles pour n_3 sont 3, 4 et 5. On en déduit facilement la valeur de n dans chaque cas à l'aide de la formule ci-dessus.

☞ **Exercice 4.** **(a)** On note M l'ensemble des éléments A de $\mathscr{P}_G(X)$ qui sont tels que $f(A) \subset A$. La réunion U des éléments de M est une partie de X, qui est encore stable par l'action de G. On a donc $U \in \mathscr{P}_G(X)$. Comme f est croissante, de $A \subset U$ on déduit $f(A) \subset f(U)$, et si de plus $A \in M$, on a $A \subset f(A)$, donc $A \subset f(U)$. On en déduit que $U \subset f(U)$, i.e. que $U \in M$. Ainsi, U est le plus grand élément de M. On a de plus, toujours parce que f est croissante, $f(U) \subset f(f(U))$, ce qui montre que $f(U) \in M$, donc que $f(U) \subset U$. On a donc $U = f(U)$.

(b) Comme f et g sont équivariantes, elles induisent des applications images directes $f : \mathscr{P}_G(X) \to \mathscr{P}_G(Y)$ et $g : \mathscr{P}_G(Y) \to \mathscr{P}_G(X)$ qui sont de plus croissantes. L'opération qui envoie une partie de X sur son complémentaire induit une application décroissante de $\mathscr{P}_G(X)$ vers lui-même. On voit donc que :

$$A \mapsto X - g(Y - f(A))$$

est une application croissante de $\mathscr{P}_G(X)$ vers lui-même. D'après la question précédente, il existe donc $A \in \mathscr{P}_G(X)$ tel que $X - A = g(Y - f(A))$. Comme f est injective, elle est une bijection (équivariante) de A vers $f(A)$ et de même g est une bijection équivariante de $Y - f(A)$ vers $X - A$. On a donc une bijection équivariante entre X et Y.