Feuille d'exercices numéro 2

☞ **Exercice 1.** *On considère le groupe G des isométries d'un triangle équilatéral, lequel agit sur le plan euclidien P.*

(a) Déterminer l'orbite de chaque point de P sous l'action de G.

(b) Déterminer le sous-groupe d'isotropie de chaque point de P.

(c) Mêmes questions en remplaçant le triangle par un carré.

☞ **Exercice 2.** *On considère une action continue du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que $x \mapsto a.x$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour tout $a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).*

(a) Montrer que cette action a au moins un point fixe (utiliser le théorème des valeurs intermédiaires).

On dit qu'un groupe G agit linéairement sur un espace vectoriel E, si pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto g.x$ (de E dans E) est linéaire.

☞ **Exercice 3.** *On suppose que le groupe $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ agit linéairement sur un espace vectoriel réel E de dimension finie.*

(a) Montrer que E est somme directe de deux sous-espaces A et B, stables par l'action de G, et tels que l'action de G sur A soit triviale ($\forall_{x \in B}\ \forall_{g \in G}\ g.x = x$), et celle de G sur B soit telle que

$$\forall_{x \in B}\ \sum_{g \in G} g.x = 0.$$

(b) Montrer que l'orbite de tout $x \in B$ est incluse dans un plan vectoriel, lequel est unique si x n'est pas nul.

(c) Généraliser l'exercice en remplaçant $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

☞ **Exercice 4.** *On considère le groupe $\mathrm{SO}(3)$ des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$ de sens direct (i.e. de déterminant $+1$), lequel agit (à gauche) sur $\mathbb{R}^3$ par $(s, x) \mapsto s(x)$.*

(a) Déterminer l'orbite de tout point de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer le sous-groupe d'isotropie de tout point de $\mathbb{R}^3$.

(c) À quelle condition deux points de $\mathbb{R}^3$ ont-ils le même sous-groupe d'isotropie ?

(d) Soient x et y deux points de $\mathbb{R}^3$, tous deux distincts de 0. Montrer que les sous-groupes d'isotropie de x et y sont conjugués.

Soit G un sous-groupe distingué de $\mathrm{SO}(3)$ contenant une rotation d'angle α tel que $0 < \alpha \leq \pi$.

(e) Montrer que si G contient toutes les rotations d'angle α.

(f) En utilisant la notion de trace et la continuité de la fonction arccos, montrer que G contient des rotations pour tous les angles β tels que $0 \leq \beta \leq 2\alpha$.

(g) Déterminer tous les sous-groupes distingués de $\mathrm{SO}(3)$.

☞ **Exercice 5.** *On rappelle que le groupe $\mathfrak{S}_3$ des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ est engendré par la permutation circulaire $\sigma = (312)$ et la transposition $\tau = (213)$.*

(a) Montrer que si G est un groupe contenant deux éléments s et t tels que $s^3 = 1$, $t^2 = 1$ et $(st)^2 = 1$, alors il existe un unique morphisme de groupes $\varphi : \mathfrak{S}_3 \to G$ tel que $\varphi(\sigma) = s$ et $\varphi(\tau) = t$.

(b) Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $\varphi : \mathfrak{S}_3 \to \mathrm{SO}(3)$ tel que

$$\varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \varphi(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Montrer que $(g, x) \mapsto \varphi(g)(x)$ est une action de $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathbb{R}^3$ et que seul 0 est fixe sous cette action.

☞ **Exercice 6.** *On considère un sous-groupe fini G de* $\mathrm{SO}(3)$ *dont l'action sur* $\mathbb{R}^3$ *n'a pas d'autre point fixe que* 0.

(a) Montrer que si deux rotations non triviales (distinctes de l'application identique) de $\mathbb{R}^3$ commutent, alors elles ont le même axe.

(b) En déduire que G ne peut pas être commutatif.