U2LG35 L3 Algèbre 2014-2015 **Université Paris-Diderot**

Exercices pour la semaine 1 (15 septembre 2014)

☞ **Exercice 1.** **(a)** Soit G un groupe (que l'on ne suppose pas commutatif). Montrer que tout élément x de G est « régulier », c'est-à-dire simplifiable à gauche et à droite, autrement-dit tel que (en notation multiplicative) $\forall_{y\in G}\ \forall_{z\in G}\ xy = xz \Rightarrow y = z$ et $\forall_{y\in G}\ \forall_{z\in G}\ yx = zx \Rightarrow y = z$.

(b) Montrer que si on dresse la table de multiplication (ou d'addition) d'un groupe, chaque élément du groupe apparaît une et une seule fois dans chaque ligne et dans chaque colonne.

(c) Montrer que tout groupe qui n'a pas plus de 5 éléments est commutatif.

(d) Décrire un groupe non commutatif à 6 éléments.

(e) Montrer que tout groupe à 7 éléments est commutatif.

(f) Décrire un groupe non commutatif à 8 éléments.

☞ **Exercice 2.** Les habitants de l'exoplanète JG 433 b calculent en base 433 (et non pas en base 10 comme nous). On demande aux élèves de cette planète de dresser la table de multiplication pour les chiffres non nuls (donc de 1 à 432), mais de ne conserver dans chaque case que le chiffre (en base 433 bien sûr) des unités. Montrer que la table obtenue est celle d'un groupe.

On appelle « monoïde » un ensemble M muni d'une loi de composition interne associative avec élément neutre. On appelle inverse à droite (resp. gauche) de $x \in M$, tout élément $y \in M$ tel que $xy = 1$ (resp. $yx = 1$).

☞ **Exercice 3.** **(a)** Montrer que l'ensemble X^X des applications d'un ensemble X vers lui-même est un monoïde (pour la composition des applications) qui n'est généralement pas un groupe.

(b) Montrer que dans le monoïde $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ il existe des éléments ayant plusieurs inverses à droite distincts. Même question pour des inverses à gauche.

(c) Montrer que si le monoïde M est fini, tout inverse à droite d'un élément x de M est aussi un inverse à gauche pour x.

(d) Montrer que si le monoïde M est fini, un élément de M ne peut pas avoir deux inverses à droite distincts.

Rappels : Une relation binaire sur un ensemble E qui est réflexive et transitive est appelée une « relation de préordre (sur E) ». Une relation de préordre sur E qui est symétrique est appelée une « relation d'équivalence (sur E) ».

☞ **Exercice 4.** *Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation de préordre sur E.*

(a) Montrer que la relation $\mathscr{R}'$ définie par $x\mathscr{R}'y$ si et seulement si $x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}x$ est une relation d'équivalence sur E.

(b) dans le cas où $E = \mathbb{Z}$ et où $x\mathscr{R}y$ signifie « x divise y », déterminer les classes d'équivalences pour $\mathscr{R}'$.

(c) Même question en remplaçant $\mathbb{Z}$ par l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[X]$.

☞ **Exercice 5.** *Soit $f : X \to Y$ une application.*

(a) Montrer que la relation définie par $x \sim_f y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence sur X.

Soit $g : Y \to X$ une fonction telle que $f \circ g$ soit l'application identique de Y.

(b) Montrer que dans chaque classe d'équivalence de $\sim_f$ il existe un et un seul élément de l'image de g.

☞ **Exercice 6.** *On note $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X et on note Y^X l'ensemble des applications de X vers Y.*

(a) Soient X et Y deux ensembles. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}(X \times Y) & \xrightarrow{\gamma} & \mathscr{P}(Y)^X \\ A & \longmapsto & (x \mapsto \{y \in Y \mid (x,y) \in A\}) \end{array}$$

et une bijection (donner une formule explicite pour γ^{-1}).

(b) En déduire une bijection (explicite) entre $\mathscr{P}(Y)^X$ et $\mathscr{P}(X)^Y$.

On suppose maintenant que $X = Y$ et que A est le graphe d'une relation d'équivalence sur X.

(c) Montrer que l'image de A par γ est la composition de la projection canonique de X sur son quotient par la relation de graphe A, avec l'inclusion canonique de ce quotient dans $\mathscr{P}(X)$.

☞ **Exercice 7.** *Soient $f, g : X \to Y$ deux applications. Soit $\pi : Y \to Z$ une application telle que $\pi \circ f = \pi \circ g$ et telle que pour tout ensemble U et toute application $\varphi : Y \to U$ telle que $\varphi \circ f = \varphi \circ g$, il existe une unique application $\overline{\varphi} : Z \to U$ telle que $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$.*

(a) Montrer que si $u, v : Z \to U$ sont deux applications telles que $u \circ \pi = v \circ \pi$, alors $u = v$.

(b) En déduire que π est surjective.

On appelle « chaîne » toute suite finie $(y_1, \ldots, y_k)$ d'éléments de Y, telle que pour toute paire d'éléments successifs (y_i, y_{i+1}) de cette suite, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y_i \wedge g(x) = y_{i+1}$ ou $g(x) = y_i \wedge f(x) = y_{i+1}$.

(c) Montrer que la relation (qu'on notera $\simeq$) entre éléments Y : « être éléments d'une même chaîne » est une relation d'équivalence sur Y.

(d) Montrer que $\simeq$ est la même relation que la relation $\sim_\pi$ définie par $y \sim_\pi y'$ si et seulement si $\pi(y) = \pi(y')$.

Solutions des exercices pour la semaine 1.

☞ **Exercice 1.**

☞ **Exercice 2.**

☞ **Exercice 3.** **(a)** La composition des applications est associative et l'application identique $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en est l'élément neutre. Ce n'est généralement car seules les applications bijectives sont inversibles dans ce monoïde.

(b) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application surjective non injective, par exemple l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \text{ est pair} \\ (x-1)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soient g et g' les applications définies par $g(x) = 2x$ et $g'(x) = 2x + 1$. On a $f(g(x)) = (2x)/2 = x$ et $f(g'(x)) = (2x + 1 - 1)/2 = x$. Ainsi, g et g' sont deux inverses à droite distincts de f.

Symétriquement, soit f l'application définie par $f(x) = 2x$. Alors toute application qui envoie les nombres pairs sur leur moitié et les autres n'importe où, est un inverse à gauche de f.

(c) Soit y un inverse à droite de x. On a donc $xy = 1$. Considérons l'application $z \mapsto zx$ de M vers M. Cette application est injective, car si $zx = ux$, on a $zxy = uxy$, et donc $z = u$. Comme M est fini, elle est bijective, et il existe donc un unique $z \in M$ tel que $zx = 1$. x a donc un inverse à gauche qui est de plus unique.

(d) Si x a un inverse à droite, il a un unique inverse à gauche d'après la question précédente, donc un unique inverse à droite d'après la symétrique de la question précédente (qui est bien sûr aussi valable).

☞ **Exercice 4.**

☞ **Exercice 5.**

☞ **Exercice 6.** **(a)** Pour tout $f \in \mathscr{P}(Y)^X$, posons $\delta(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in f(x)\}$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
\delta(\gamma(A)) & = & \delta(x \mapsto \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}) \\
& = & \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}\} \\
& = & \{(x, y) \in X \times Y \mid (x, y) \in A\} \\
& = & A \\
\gamma(\delta(f)) & = & \gamma(\{(x, y) \in X \times Y \mid y \in f(x)\}) \\
& = & x \mapsto \{y \in Y \mid (x, y) \in \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in f(x)\}\} \\
& = & x \mapsto \{y \in Y \mid y \in f(x)\} \\
& = & x \mapsto f(x) \\
& = & f
\end{array}$$

(b) Comme $\sigma = ((x, y) \mapsto (y, x))$ est une bijection de $X \times Y$ vers $Y \times X$, on dispose des bijections :

$$\mathscr{P}(Y)^X \xrightarrow{\delta} \mathscr{P}(X \times Y) \xrightarrow{\sigma_*} \mathscr{P}(Y \times X) \xrightarrow{\gamma} \mathscr{P}(X)^Y$$

où pour tout $A \in \mathscr{P}(X \times Y)$, $\sigma_*(A)$ est l'image directe de A par σ (vérifier que σ_* est bien bijective en exhibant son inverse). Précisément, on a $\sigma_*(A) = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in A\}$. On a donc des formules epxlicites pour toutes ces bijections, et en les composant on obtient la bijection suivante de $\mathscr{P}(Y)^X$ vers $\mathscr{P}(X)^Y$:

$$f \mapsto (y \mapsto \{x \in X \mid y \in f(x)\})$$

(c) La projection de X sur son quotient par la relation d'équivalence de graphe A est donnée par $x \mapsto \{y \in X \mid (x, y) \in A\}$. Notez que la classe d'équivalence $\{y \in X \mid (x, y) \in A\}$ est un élément de $\mathscr{P}(X)$ et que son image par l'inclusion canonique du quotient dans $\mathscr{P}(X)$ est encore $\{y \in X \mid (x, y) \in A\}$. Or l'image de A par γ est justement $x \mapsto \{y \in X \mid (x, y) \in A\}$.

☞ **Exercice 7.** **(a)** On a $u \circ \pi \circ f = u \circ \pi \circ g$. Il existe donc une unique application $\overline{\varphi} : Z \to U$ telle que $\overline{\varphi} \circ \pi = u \circ \pi$. Par unicité de $\overline{\varphi}$, on a $u = \overline{\varphi}$. Comme $u \circ \pi = v \circ \pi$, on obtient le même $\overline{\varphi}$ en raisonnant avec v au lieu de u. On a donc $u = \overline{\varphi} = v$.

(b) Supposons qu'un élément $z \in Z$ ne soit pas dans l'image de π. Soit $B = \{0, 1\}$ un ensemble à deux éléments. Posons $u(z) = 0$, $v(z) = 1$ et $u(z') = v(z') = 0$ pour tout z' distinct de z. On a alors $u \circ \pi = v \circ \pi$, donc $u = v$ d'après la question précédente, ce qui est contradictoire.

(c) La relation $\simeq$ est clairement reflexive et symétrique. Il reste à voir qu'elle est transitive. Supposons donc que $x \simeq y$ et $y \simeq z$. Il suffit d'aller de x à z en changeant de chaîne en y (comme quand on prend une corespondance dans le métro !). Noter l'importance de la condition symétrique $f(x) = y_i \wedge g(x) = y_{i+1}$ ou $g(x) = y_i \wedge f(x) = y_{i+1}$ dans l'énoncé qui fait que le parcours ainsi obtenu est encore une chaîne (les maillons des chaînes ne sont pas orientés).

(d) Supposons d'abord que $x \simeq y$. Il existe donc une chaîne $(y_1, \dots, y_k)$ telle que $x = y_1$ et $y = y_k$. On doit montrer que $\pi(x) = \pi(y)$. On raisonne par récurrence sur k (qui vaut au moins 1). Si $k = 1$, alors $x = y$ et $\pi(x) = \pi(y)$. Si $k = 2$, il existe $u \in X$ tel que $f(u) = x \wedge g(u) = y$ ou $g(u) = x \wedge f(u) = y$. On a alors $\pi(x) = \pi(y)$ car $\pi \circ f = \pi \circ g$. Enfin, si $k \geq 3$, il existe un élément z dans la chaîne $(y_1, \dots, y_k)$ distinct de x et de y. On a alors $\pi(x) = \pi(z)$ et $\pi(z) = \pi(y)$ par hypothèse de récurrence.

Réciproquement, soit $p : Y \to Y/\simeq$ la projection canonique. Comme, pour tout $u \in X$, $f(u)$ et $g(u)$ sont liés par $\simeq$, on a $p \circ f = p \circ g$. Il existe donc une unique application $\overline{\varphi} : Z \to Y/\simeq$ telle que $\overline{\varphi} \circ \pi = p$. Supposons que $\pi(x) = \pi(y)$. On doit montrer que $x \simeq y$. On a $\overline{\varphi}(\pi(x)) = \overline{\varphi}(\pi(y))$, donc $p(x) = p(y)$, donc $x \simeq y$.