Université Paris Diderot
M1 mathématiques

Algèbre – Année 2019-20

Feuille 5

Représentations de groupes finis

1. Soit G un groupe fini. Soit A un anneau commutatif. On note $A[G]$ le A-module libre de base G. On note $[g]$ l'élément de la base correspondant à $g \in G$. Pour $\sum_{g\in G} \lambda_{g\in G}[g]$, $\sum_{g\in G} \mu_g[g] \in A[G]$, on pose $(\sum_{g\in G} \lambda_g[g])(\sum_{g\in G} \mu_g[g]) = \sum_{g' inG} \sum_{h\in G} \lambda_h \mu_{h^{-1}g}[g]$.
1.a. Montrer que cela fait de $A[G]$ un anneau, qui est commutatif si et seulement si G est abélien, et même une A-algèbre appelée *algèbre de convolution* de G.
1.b. Supposons $A = \mathbf{C}$. Montrer qu'on obtient une représentation ρ_R de G sur $A[G]$, appelée *représentation régulière*, par $\rho(g)([h]) = [gh]$. Montrer que cette représentation est fidèle.
1.c. Déterminer le caractère de la représentation régulière de G.
1.d. Supposons $A = \mathbf{C}$. Montrer qu'une représentation ρ de G sur $A[G]$ est donnée par $\rho(g)([h]) = [ghg^{-1}]$.
1.e. Soit X un ensemble muni d'une action de G. Montrer que $A[X]$ est un $A[G]$-module, ou encore, si $A = \mathbf{C}$ que $A[X]$ est une représentation de G. Montrer que le caractère χ d'une telle représentation vérifie que $\chi(g)$ est le nombre de points fixes de g dans X, pour tout $g \in G$.

2. Soit G un groupe fini. Soit χ un caractère de G qui vérifie $\chi(g) = 0$, si $g \in G$ n'est pas l'élément neutre.
2.a. Notons χ_0 la représentation triviale de G. Calculer le produit scalaire $< \chi_0, \chi >$.
2.b. En déduire que $|G|$ divise $\chi(1)$, et que χ est multiple du caractère de la représentation régulière de G.

3. Soit G un groupe abélien fini. On pose $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*)$ le *groupe dual* ou *groupe des caractères* de G.
3.a. Montrer que $\hat{G}$ est un groupe (pour le produit des morphismes).
3.b. Supposons G cyclique. Notons n son ordre. Montrer que $\hat{G}$ est cyclique d'ordre n.
3.c. Supposons qu'il existe G_1 et G_2 deux groupes finis tels que G est isomorphe à $G_1 \times G_2$. Montrer que $\hat{G}$ est isomorphe à $\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$.
3.d. Montrer que G est isomorphe à $\hat{G}$.
3.e. Montrer que toute représentation irréductible de G est de dimension 1.
3.f. Montrer que $\hat{G}$ n'est autre que l'ensemble des caractères des représentations irréductibles de G.
3.g. Montrer que l'application $G \to \hat{\hat{G}}$ qui à g associe $\chi \mapsto \chi(g)$ est un isomorphisme de groupes.

4. Soit G un groupe fini. Soit A un sous-groupe abélien fini d'indice n dans G. Soit χ un caractère de A.
4.a. Montrer qu'on a $\sum_{a\in A} |\chi(a)|^2 \geq \chi(1)|A|$.
4.b. Montrer que si χ s'étend en un caractère irréductible de G, on a $\chi(1) \leq n$.
4.c. Montrer que si $\chi(1) = n$, le caractère χ est nul sur $G - A$.

5. Soit $\mathcal{S}_3$ le groupe symétrique sur 3 lettres. Considérons $V = \mathbf{C}[\mathcal{S}_3]$ et la représentation de $\mathcal{S}_3$ sur V donnée par la conjugaison. Soit j une racine cubique primitive de 1 dans $\mathbf{C}$. Posons $\alpha = [(1,2)] + j[(1,3)] + j^2[(2,3)]$ et $\beta = [(1,2)] + j^2[(1,3)] + j[(2,3)]$. Posons $W = \mathbf{C}\alpha + \mathbf{C}\beta$.
5.a. Montrer que W est une représentation de G de dimension 2. Cette représentation est-elle irréductible ?
5.b. Écrire la décomposition de V en somme directe de sous-espaces irréductibles. Indiquer quelle est l'action de G pour chacun des termes de cette décomposition.

6. Considérons le groupe diédral $D_4 = \{1, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$, avec $a^4 = 1$, $bab = a^3$ et $b^2 = 1$.
6.a. Quelles sont les classes de conjugaison de D_4 ?
6.b. En déduire que ce groupe admet 5 représentations irréductibles.
6.c. Montrer que D_4 admet un quotient isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. En déduire quatre représentations de dimension 1 de D_4.
6.d. En déduire la cinquième représentation irréductibles de D_4 est de dimension 2.
6.e. Écrire la table des caractères de D_4.

7. Considérons le groupe des quaternions $H_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, avec les relations $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $(-1)^2 = 1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$. On a $(-1)x = -x$ pour tout $x \in H_8$.
7.a. Déterminer les classes de conjugaison de H_8.
7.b. En déduire que ce groupe admet 5 représentations irréductibles.
7.c. Montrer que H_8 admet un quotient isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. En déduire quatre représentations de dimension 1 de H_8.
7.d. En déduire la cinquième représentation irréductibles de H_8 est de dimension 2.
7.e. Écrire la table des caractères de H_8.

8. Les groupes D_4 et H_8 sont-ils isomorphes ? Deux groupes finis ayant la même table de caractères sont-ils isomorphes ?

9. Soit $\mathcal{S}_4$ le groupe symétrique sur 4 lettres.
9.a. Déterminer les classes de conjugaison de $\mathcal{S}_4$.
9.b. Montrer qu'on a une représentation de dimension 3 de $\mathcal{S}_4$ donnée par l'action de ce groupe sur les sommets d'un tétraèdre régulier.
9.c. Montrer qu'on a une représentation de dimension 3 de $\mathcal{S}_4$ donnée par l'action de ce groupe sur les diagonales d'un cube.
9.d. Considérons le sous-groupe T de $\mathcal{S}_4$ engendré par les doubles transpositions. Montrer que c'est un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_4$ et le groupe quotient $\mathcal{S}_4/T$ est isomorphe à $\mathcal{S}_3$.
9.e. Montrer qu'on a une représentation de dimension 2 de $\mathcal{S}_3$ donnée par l'action sur les sommets d'un triangle équilatéral.
9.f. En déduire une représentation irréductible de dimension 2 de $\mathcal{S}_4$.
9.g. Établir la table des caractères de $\mathcal{S}_4$.
9.h. Établir la table des caractères du groupe alterné $\mathcal{A}_4$.

10. Soit p un nombre premier. Pour $a \in \mathbf{F}_p^\times$ et $b \in \mathbf{F}_p$, notons $\phi_{a,b}$ l'application affine de $\mathbf{F}_p \to \mathbf{F}_p$ qui à x associe $ax + b$. Si $a = 1$, on dit que $\phi_{a,b}$ est une *translation*. Si $b = 0$, on dit que $\phi_{a,b}$ est une *homothétie*.
10.a. Montrer $G = \{\phi_{a,b} / a \in \mathbf{F}_p^\times, b \in \mathbf{F}_p\}$ est un groupe pour la composition des applications. Quel est l'ordre de G ?
10.b. Quelles sont les classes de conjugaison de G ?
10.c. Montrer que les translations constituent un sous-groupe distingué T de G.
10.d. En déduire que G admet $p - 1$ représentations de dimension 1.
10.e. Montrer que G admet une représentation irréductible de dimension p.
10.f. Établir la table des caractères de G.

11. Soit G un groupe fini. Soit X un ensemble fini muni d'une action transitive de G. Soit ρ la représentaion de G sur $\mathbf{C}[X]$ déduire de l'action de G sur X. Notons χ le caractère de ρ. On a une action de G sur $X \times X$ dite *diagonale*, c'est-à-dire donnée par $(g, (x, y)) \mapsto (gx, gy)$. On obtient ainsi une représentation ρ_2 de G sur $\mathbf{C}[X \times X]$. Si l'action de G sur $X \times X$ privé de la diagonale est transitive, on dit que l'action de G sur X est *doublement transitive*.
11.a. Montrer que la représentation triviale χ_0 de G intervient avec multiplicité 1 dans ρ. Posons $\rho = \chi_0 \oplus \rho'$.
11.b. Montrer que le caractère de ρ_2 est χ^2.
11.c. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes : *(i)* ρ' est irréductible, *(ii)* l'action de G sur X est doublement transitive et *(iii)* on a $< \chi^2, \chi_0 >= 2$.

12. Soit G un groupe fini. Soit ρ une représentation de G sur un espace vectoriel complexe V. Notons $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbf{C})$ l'espace vectoriel dual de V.
12.a. Montrer que l'application $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ qui à g associe $\phi \mapsto \phi \circ \rho(g)$ est une représentation de G. C'est la *représentation duale* de ρ.
12.b. Montrer que, si on note χ et χ^* les caractères de ρ et ρ^* respectivement, on a $\chi^* = \bar{\chi}$.

13. Soit p un nombre premier. Soit $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$.
13.a. Quel est le cardinal de G ?
13.b. Quelles sont les classes de conjugaisons de G ?