Feuille 4

Modules

1.a. Soit A un anneau commutatif. Soit $\phi : A \to A$ une application A-linéaire (un morphisme de A-modules). Montrer que pour tout $a \in A$, on a $\phi(a) = a\phi(1)$, et donc que ϕ est déterminée par $\phi(1)$.
1.b. Donner un exemple de morphisme d'anneaux $A \to A$ qui ne soit pas un morphisme de A-modules.
1.c. Donner un exemple de morphisme de A-modules $A \to A$ qui ne soit pas un morphisme d'anneaux.
1.d. Soit n un entier ≥ 1. Soit M un A-module. Notons $(e_1, e_2 ... e_n)$ la base canonique de A^n. Soit $\phi : A^n \to M$ une application A-linéaire. Montrer qu'elle est déterminée par le n-uplet $(\phi(e_1), \phi(e_2)...\phi(e_n))$. Montrer que l'application $\phi \mapsto (\phi(e_1), \phi(e_2)...\phi(e_n))$ est surjective.
1.e. Soit N un A module. Soit $(e_1, e_2...e_n)$ une famille de N. Montrer que l'application qui à l'application A-linéaire $\phi : N \to M$ associe le n-uplet $(\phi(e_1), \phi(e_2)...\phi(e_n))$ est une bijection (resp. injection, resp. surjection) si $(e_1, e_2...e_n)$ une base (resp. famille génératrice, resp. famille libre) de N. Donner des exemples où cette application n'est pas bijective lorsque $(e_1, e_2...e_n)$ est libre (resp. génératrice).

2. Soit A un anneau commutatif. Soit M un A-module. Il est dit *simple* s'il ne possède pas de sous-module distinct de $\{0\}$ et M.
2.a. Montrer que A est simple si et seulement si A est l'anneau nul ou est un corps.
2.b. Donner des exemples d'idéaux I de A qui sont des A-modules simples.
2.c. Montrer que tout A-module simple non nul est isomorphe à A/I où I est un idéal maximal de A.
2.d. Soit I un idéal non-trivial de A. Montrer que A/I n'est pas un module libre.
2.e. Supposons que tout A-module est libre. Montrer que A est un corps ou l'anneau nul.

3. Soit A un anneau commutatif. Soit M un A-module. Soit I un idéal de A. Posons $M[I] = \{m \in M / Im = 0\}$ et notons IM le sous-module de M engendré par $\{tm / t \in I, m \in M\}$. Si I est un idéal principal engendré par $a \in A$, on pose $M[a] = M[I]$ et $aM = IM$.
3.a. Montrer que $M[I]$ et IM sont des sous-A-modules de M.
3.b. Supposons I principal. Soit a un générateur de I. Montrer que $M \to M$ qui à m associe am est linéaire. Montrer que son noyau est $M[I]$, que son image est IM, puis que le module $M/M[I]$ est isomorphe à IM.
3.c. Supposons de plus M fini. Montrer que les A-modules $M[I]$ et M/IM sont finis et de même cardinal.
3.d. Soit N un A-module isomorphe à M. Montrer que $M[I]$ (resp. IM) est isomorphe à $N[I]$ (resp. IN).
3.e. En considérant le cas $A = \mathbf{Z}$, $I = p\mathbf{Z}$, avec p premier, $M = \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ et $N = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$, déterminer $M[I]$ et $N[I]$. En déduire que M et N ne sont pas isomorphes.

4.a. Tout sous-module libre d'un module libre admet-il un supplémentaire ?
4.b. Si N est un sous-module de M tel que M/N est libre, montrer que N admet un supplémentaire.

5. Soit A l'anneau des fonctions continues $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et I l'ensemble des éléments de A à support compact.
5.a. Montrer que I est un idéal de A (et donc un sous-module).
5.b. Montrer que I n'est pas de type fini comme A-module.

6. Soit K un corps commutatif. Posons $A = \{P \in K[X] / P = a_0 + a_2X^2 + a_3X^3 + ...\}$.
6.a. Montrer que A est un anneau commutatif.
6.b. Notons I l'idéal de A engendré par $\{X^2, X^3\}$. Est-il principal ? Est-ce un A-module isomorphe à A ?
6.c. Montrer que l'application $A^2 \to I$ qui à (P, Q) associe $PX^2 + QX^3$ est surjective.
6.d. Le noyau de ce morphisme est-il engendré par $(-X^3, X^2)$. Est-ce un A-module isomorphe à A ?

7.a. Soit K un corps. Montrer que l'anneau $A = K[(X_i)_{i \in \mathbf{N}}]$ n'est pas noethérien.
7.b. Montrer que A est un A-module de type fini non noethérien.

8. Soit A un anneau commutatif intègre. Soit n un entier ≥ 0.
8.a. Montrer que $A[X]$ muni de l'action $A \times A[X] \to A[X]$ qui à (a, P) associe aP est un A-module.
8.b. Montrer que les polynômes de $A[X]$ nuls ou de degré $< n$ constituent un A-module libre de rang n.

8.c. Soit $P \in A[X]$ de degré n. Montrer que $(P) = PA[X]$ est un A-module. Le A module quotient $A[X]/(P)$ est-il libre ? (On pourra considérer $A = \mathbf{Z}$ et le polynôme constant égal à 2). Qu'en est-il si P est unitaire ?

9. Soit A un anneau commutatif. Soit M un A-module. Notons $\mathrm{End}_A(M)$ l'ensemble des applications linéaires $A \to A$.
9.a. Rappeler pourquoi c'est un A-module, un anneau. Est-ce une A-algèbre ?
9.b. Montrer que l'application $A \to \mathrm{End}_A(M)$ donnée par $a \mapsto (m \mapsto am)$ est un morphisme d'anneaux.

10. Soit A un anneau commutatif intègre. Soit M un A-module. Soit $m \in M$. On dit que m est de *torsion* s'il existe $a \in A$, $a \neq 0$ tel que $am = 0$. On note M_{tors} l'ensemble des éléments de torsion de M. On dit que M est de *torsion* si $M = M_{\mathrm{tors}}$. On dit que M est *sans torsion* si $M_{\mathrm{tors}} = \{0\}$.
10.a. Montrer que M_{tors} est un sous-A-module de M.
10.b. Montrer que le module quotient M/M_{tors} est sans torsion.
10.c. Montrer que si A est infini, tout A-module fini est de torsion.
10.d. Soient M et N deux A-modules. Soit $f : M \to N$ un morphisme surjectif de A-modules. Notons L le noyau de f. Montrer que si L et N sont de torsion, M est de torsion.
10.e. Montrer que $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est un $\mathbf{Z}$-module de torsion. Montrer que l'ensemble des racines de l'unité dans $\mathbf{C}$ est un $\mathbf{Z}$-module de torsion. L'ensemble des nombres complexes de module 1 est-il un $\mathbf{Z}$-module de torsion ?
10.f. Soient x_1,..., $x_n \in \mathbf{Q}$. Montrer qu'il existe $y \in \mathbf{Q}$ tel que $y \notin \mathbf{Z}x_1 + ... + \mathbf{Z}x_n$. En déduire que $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ n'est pas de type fini.

11. Soit A un anneau commutatif. Soient M et N deux A-modules. Posons $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ l'ensemble des morphismes de A-modules de M vers N. En particulier, $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ s'appelle le *module dual* de M.
11.a. Rappeler comment $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ est muni d'une structure de A-module.
11.b. Montrer que si M est libre de rang n, il en est de même de $\mathrm{Hom}_A(M, A)$.
11.c. Quel est le dual du $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?
11.d. Montrer que $m \mapsto (\phi \mapsto \phi(m))$ est un morphisme de A-modules $M \to (M^*)^*$. Montrer que c'est un isomorphisme lorsque M est libre de rang fini. Est-ce un isomorphisme lorsque $A = \mathbf{Z}$ et $M = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?
11.e. Montrer qu'un morphisme de A-modules $f : M \to N$ donne lieu à un morphisme (dit *dual*) $f^* : N^* \to M^*$. Montrer que si f est surjective, f^* est injective. Si f est injective, f^* est-elle surjective ?

12. Soit A un anneau commutatif. Soient M et N deux A-modules. Soit $f : M \to N$ un morphisme surjectif de A-modules. Notons L le noyau de f.
12.a. Donner un exemple où M et L sont libres sans que N soit libre.
12.b. Montrer que si L et N sont libres, M est libre. Quel est le rang de M ?
12.c. Donner un exemple où M est libre sans que L soit libre. (On pourra penser à $A = M = \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$.)
12.d. Supposons que $M = A^2$ et $N = A$. Montrer que le noyau de f est libre.
12.e. Lorsque M est libre et L est de type fini, on dit que N est de *présentation finie*. Montrer que tout module de type fini sur un anneau principal est de présentation finie.
12.f. Soit K un corps. Supposons que $A = K[(X_i)_{i \in \mathbf{N}}]$. Considérons l'idéal I de A engendré par $\{X_1, X_2, ...\}$. Montrer que l'anneau-quotient A/I est isomorphe à K, ce qui fait de K un A-module. Montrer que K est de type fini comme A-module, mais pas de présentation finie.

13. Soit A un anneau commutatif, M un A-module noethérien et u un morphisme surjectif $M \to M$.
13.a. Montrer que la suite des noyaux de u^n est croissante, pour n entier ≥ 1.
13.b. En déduire que u est injectif (et donc bijectif).
13.c. Si A n'est pas un corps, existe-t-il toujours une application linéaire injective et non surjective $A \to A$?

14. Soit A un anneau commutatif. Soit M un A-module de type fini et I un idéal de A.
14.a. Soit C une matrice carrée à coefficients dans I. Montrer que le déterminant de $\mathrm{Id} + C$ est dans $1 + I$.
14.b. Supposons que $M = IM$. Soit $(m_i)_{i \in J}$ une famille finie de générateurs du A-module M. Montrer qu'il existe une matrice $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in J^2}$ avec $b_{i,j} \in I$ telle que, pour tout $i \in J$, on ait $m_i = \sum_{j \in J} b_{i,j} m_j$. Montrer que le déterminant de $\mathrm{Id} - B$ annule M.
14.c. Supposons que $M = IM$, montrer qu'il existe $a \in I$ tel que $(1 + a)M = 0$.
14.d. En déduire que, si I est l'unique idéal maximal de A, et que $M = IM$, on a $M = \{0\}$.
14.e. Notons R l'intersection de tous les idéaux maximaux de A. Montrer que si $RM = M$, on a $M = \{0\}$.
14.f. On suppose I de type fini et tel que $I^2 = I$. Montrer qu'il existe un générateur e de I tel que $e^2 = e$.

15. Soit A un anneau commutatif. Soit $f : M \to N$ une application linéaire surjective de noyau L. On dit alors qu'on a une *suite exacte courte* $0 \to L \to M \to N \to 0$ de A-modules. On dit qu'elle est *scindée* si f admet une section (un inverse à droite A-linéaire).
15.a. Montrer qu'alors M est isomorphe à $L \times N$.
15.b. Montrer que si A est un corps toute suite exacte courte est scindée. (On admet l'axiome du choix.)
15.c. Montrer que si A est intègre et n'est pas un corps, il existe une suite exacte de A-modules non scindée.

16. Soit A un anneau. Soient M_0, $...M_n$ des A-modules. Pour $i \in \{1, ..., n\}$, soit $f_i : M_{i-1} \to M_i$ un morphisme de A-modules. Si $\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$ $(1 \leq i < n)$ et si f_1 est injective et f_n est surjective, on dit qu'on a une *suite exacte* et on écrit (c'est la situation dans laquelle nous nous plaçons) :

$$0 \to M_0 \to M_1 .... \to M_n \to 0.$$

16.a. Montrer que si A est un corps et M_i un espace vectoriel de dimension d_i $(0 \leq i \leq n)$, on a $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i = 0$. Montrer qu'il en est de même si A est principal et si M_i est libre de rang d_i comme A-module.
16.b. Montrer que si $A = \mathbf{Z}$ et M_i est un groupe abélien fini d'ordre t_i $(0 \leq i \leq n)$, on a $\prod_{i=0}^{n} t_i^{(-1)^i} = 1$.
16.c. Supposons que $A = \mathbf{Z}$ et $M_i = T_i \oplus N_i$, avec T_i fini d'ordre t_i et N_i libre de rang d_i, a-t-on $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i = 0$ et $\prod_{i=0}^{n} t_i^{(-1)^i} = 1$? (On pourra examiner le cas où $n = 2$, $M_0 = M_1 = \mathbf{Z}$, f_1 est la multiplication par 2 et f_2 est la surjection canonique $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.)
16.d. Montrer que si chacun des M_i, sauf peut-être l'un d'entre eux est noethérien, ils sont tous noethériens.
16.e. Soient N_0, $...N_n$ des modules noethériens, montrer que le produit $N_0 \times N_1 \times ... \times N_n$ est noethérien.

17. Soit A un anneau commutatif. Soit un diagramme commutatif de A-modules dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc} & & M_1 & \to & M_2 & \to & M_3 & \to & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \to & N_1 & \to & N_2 & \to & N_3 & & \end{array}.$$

17.a. Construire une application A-linéaire $\delta : \mathrm{Ker}(w) \to \mathrm{Coker}(u)$.
17.b. Montrer qu'elle se prolonge en une suite exacte longue

$$\mathrm{Ker}(u) \to \mathrm{Ker}(v) \to \mathrm{Ker}(w) \to \mathrm{Coker}(u) \to \mathrm{Coker}(v) \to \mathrm{Coker}(w),$$

où, en dehors de δ, les morphismes sont obtenus par restrictions des morphismes ci-cessus.

18. Soit K un corps. Soit E un K-espace vectoriel. Soit u un endomorphisme de E.
18.a. Rappeler comment u fait de E un $K[X]$-module.
18.b. Montrer que si E est de dimension finie comme K-espace vectoriel, E est de type fini comme $K[X]$-module. Notons alors M le polynôme minimal de u. Montrer que E est un $K[X]/(M)$-module et que c'est un $K[X]$-module de torsion.
18.c. Posons $E = K[T]$. Lorsque u est la multiplication par T, montrer que E est un $K[X]$-module libre.
18.d. Posons $E = K[T]$. Lorsque u est la dérivation dans $K[T]$, montrer que E n'est pas de type fini comme $K[X]$-module (montrer que, si c'était le cas, il existerait $P_1, ... P_r \in K[T]$ tels que tout élément de $K[T]$ soit combinaison K-linéaire des dérivées successives de $P_1, ... P_r$.) Montrer que tout élément de E est de torsion.

19. Soit A un anneau commutatif. Soit P un A-module. On dit qu'il est *projectif* si et seulement si pour tout morphisme $f : P \to M$ de A-modules et tout morphisme surjectif $g : N \to M$ de A-modules, il existe un morphisme de A-modules $h : P \to N$ tel que $f = g \circ h$.

On dit que P est *plat* si le foncteur $\otimes P$ est exact. Autrement dit, si pour toute suite exacte de A-modules $0 \to N \to M \to L \to 0$ on a une suite exacte de A-modules $0 \to N \otimes P \to M \otimes P \to L \otimes P \to 0$.
19.a. Montrer qu'il revient au même de dire que P est projectif et que toute suite exacte courte $0 \to L \to N \to P \to 0$ est scindée.
19.b. Montrer que tout module libre est projectif.
19.c. Montrer que P est projectif si et seulement si le foncteur $A \mapsto \mathrm{Hom}(P, A)$ est exact (*i.e.* il transporte toute suite exacte de A-modules $0 \to N \to M \to L \to 0$ en une suite exacte $0 \to \mathrm{Hom}(P, N) \to \mathrm{Hom}(P, M) \to \mathrm{Hom}(P, L) \to 0$).

19.d. Montrer que P est projectif si et seulement si il existe un A-module Q tel que $L = P \oplus Q$ est un A-module libre. (On dit que P est un *facteur direct* de L.)
19.e. Si $A = \mathbf{Z}$, montrer que P est projectif si et seulement si il est libre.
19.f. Montrer que le module $\mathbf{Z} \times 0$ sur l'anneau $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ est projectif sans être libre.
19.g. Montrer que tout module projectif est plat.
19.h. Montrer que tout module plat est sans torsion.
19.i. Montrer que $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est un $\mathbf{Z}$-module ni projectif ni (*a fortiori*) plat.

20. Soit A le $\mathbf{Z}$-module des suites à valeurs entières qui sont nulles à partir d'un certain rang (les suites *presque nulles*). Notons A' le $\mathbf{Z}$-module des suites à valeurs entières. Soit M un $\mathbf{Z}$-module, on note $M^* = \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z})$. Pour n entier ≥ 0, on note δ_n la suite dont tous les termes sont nuls, sauf le n-ème terme, qui vaut 1.
20.a. Montrer qu'on a des homomorphismes de $\mathbf{Z}$-modules $\phi : A' \to A^*$ et $\psi : A \to A'^*$ tous deux donnés par l'application qui à $(u_n)_{n\geq 0}$ associe $(v_n)_{n\geq 0} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$.
20.b. Montrer que ϕ est injectif (on pourra évaluer un élément de A' en δ_n) puis que ϕ est surjectif. A-t-on un isomorphisme similaire, entre le K-espace vectoriel B des suites presque nulles à valeurs dans un corps K et le dual du K-espace vectoriel B' des suites à valeurs dans K ?
20.c. Montrer que ψ est injectif.
20.d. Soit $f \in A'^*$. Supposons que f soit nulle sur les suites presque nulles. Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in A'$. Montrer que pour tout ≥ 0, il existe x_n, $y_n \in \mathbf{Z}$ tels que $u_n = 2^n x_n + 3^n y_n$. Montrer que $f((2^n x_n)_{n\geq 0}) = 0$ et que $f((3^n y_n)_{n\geq 0}) = 0$. En déduire que f est nulle.
20.e. Soit $f \in A'^*$. Soit $(k_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que, pour tout entier $n \geq 0$, on ait : $2^{k_{n+1}}/2 > \sum_{m=0}^{n} 2^{k_m}|f(\delta_m)|$. Considérons la suite $x = (2^{k_n})_{n\geq 0}$. Montrer que $f(x) = f(x_n) + f(y_n)$ avec $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'éléments de B vérifiant $|f(x_n)| < |f(x)| + 2^{k_{n+1}}/2$ et $f(y_n) \in 2^{k_{n+1}}\mathbf{Z}$ (poser $x_n = \sum_{m=0}^{n} 2^{k_m}\delta_m$). En déduire que $f(x_n)$ est nul pour n assez grand, puis que la suite $(f(\delta_n))_{n\geq 0}$ est presque nulle.
20.f. Montrer que ψ est un isomorphisme. Ainsi, on a $(A^*)^* \simeq A$.
20.g. Si K est un corps fini ou dénombrable, montrer que B est dénombrable et que B' ne l'est pas. Existe-t-il une forme linéaire non nulle sur B' qui est nulle sur B ? A-t-on un isomorphisme de K-espaces vectoriels, similaire à ψ, entre B et B'^*, et donc un isomrophisme entre B et $(B^*)^*$?
20.h. On pourra en particulier s'intéresser à situation où K est un corps à deux éléments notés 0 et 1. Montrer que B s'identifie à l'ensemble $\mathcal{P}_0(\mathbf{N})$ formé par les sous-ensembles finis de $\mathbf{N}$ et B' à l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ des parties de $\mathbf{N}$. On dit que deux éléments de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ sont *presque égaux* s'ils diffèrent par un ensemble fini (en particulier tous les ensembles finis, y compris le vide, sont presque égaux). Montrer que la presque égalité est une relation d'équivalence. Notons $\mathcal{P}(\mathbf{N})/\mathcal{P}_0(\mathbf{N})$ l'ensemble quotient. Montrer qu'il s'identifie à l'espace vectoriel quotient B'/B. Peut-on exhiber une forme linéaire sur B'/B ?