Feuille 3

Anneaux noethériens, polynômes symétriques

1.a. L'anneau des fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est-il noethérien ?
1.b. L'anneau des suites à valeurs entières est-il noethérien ?
1.c. Soit K un corps. Montrer que le sous-anneau de $K[X,Y]$ engendré par $\{X^nY/n \geq 1\}$ n'est pas un anneau noethérien.
1.d. L'anneau $\{P \in \mathbf{Q}[X]/P(0) \in \mathbf{Z}\}$ est-il noethérien ?
1.e. L'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ est-il noethérien ?

2.a. Soit A un anneau commutatif. Montrer que si $A[X]$ est noethérien, A est noethérien.
2.b. Montrer que tout anneau quotient d'un anneau commutatif noethérien est noethérien.
2.c. Soit A un anneau commutatif noethérien. Notons K le corps des fractions de A. Soit I un idéal premier de A. Posons $A_{(I)} = \{a/b \in K/a \in A, b \notin I\}$. C'est le localisé de A en I. Montrer que c'est un anneau noethérien.

3.a. Soit K un corps. Les anneaux $K[X,Y]/(XY-1)$ et $K[T]$ sont-ils noethériens ? Ces anneaux sont-ils isomorphes comme K-algèbres ?
3.b. L'anneau des fonctions entières est-il isomorphe à $\mathbf{C}[X]$?

4. Soit A un anneau commutatif noethérien. Soit I un idéal de $A[X]$. Pour n entier ≥ 0, on note $d_n(I)$ le sous-ensemble de A formé de 0 et des coefficients dominants des polynômes de degré n de I.
4.a. Montrer que $d_n(I)$ est un idéal de A. Montrer que $d_n(I) \subset d_{n+1}(I)$ pour tout entier $n \geq 0$.
4.b. Soit J est un idéal de $A[X]$ contenant I, montrer qu'on a $d_n(I) \subset d_n(J)$. Si de plus $d_n(I) = d_n(J)$ pour tout $n \geq 0$, montrer qu'on a $I = J$.
4.c. Soit $(I_k)_{k\geq 1}$ une suite croissante d'idéaux de $A[X]$. Montrer qu'il existe des entiers m et l tels que $d_m(I_l)$ soit maximal dans la famille $(d_n(I_k))_{k\geq 1, n\geq 1}$.
4.d. Montrer que pour tout entier n avec $n \leq m$, il existe un entier k_n tel que pour tout $k \geq k_n$, on ait $d_n(I_k) = d_n(I_{k_n})$.
4.e. Posons $K = \max(l, k_0, k_1, ..., k_m)$. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et tout $k \geq K$, on a $d_n(I_k) = d_n(I_K)$. En déduire que la suite $(I_k)_{k\geq 1}$ est stationnaire.
4.f. Montrer que $A[X]$ est noethérien (c'est le *théorème de transfert de Hilbert*), puis que $A[X_1, X_2, ..., X_n]$ est un anneau noethérien.
4.g. Soit B une A-algèbre de type fini. Montrer que B est un anneau noethérien.
4.h. L'anneau $A[(X_n)_{n\geq 1}]$ est-il noethérien ?

5. Montrer que tout anneau principal est noethérien. Tout anneau factoriel est-il noethérien ?

6. Soit A un anneau intègre noethérien. Montrer que tout élément de A peut s'écrire comme produit d'irréductibles.

7. Soit A un anneau intègre. On dit qu'il est *de Bézout* s'il vérifie la propriété dite de Bézout suivante : pour tout $(a,b) \in A^2$, il existe $(u,v) \in A^2$ tel que $au + bv$ soit un pgcd de a et b.
7.a. Montrer que tout anneau principal est de Bézout.
7.b. Montrer que, lorsque K est un corps, l'anneau $K[X,Y]$ n'est pas de Bézout.
7.c. Si A est un anneau de Bézout, l'anneau $A[X]$ est-il en général de Bézout ?
7.d. Montrer que tout idéal de type fini de A est principal lorsque A est de Bézout.
7.e. Montrer que tout anneau noethérien et de Bézout est principal.
7.f. Soit $b \in I$. Soit d un pgcd de a et b. Montrer que $d \in I$.
7.g. En déduire que $dA = aA$.
7.h. En déduire que A est principal.
7.i. Montrer que $B = \{P \in \mathbf{Q}[X]/P(0) \in \mathbf{Z}\}$ est un anneau (il est en fait de Bézout).

7.j. L'idéal $I = \{P \in B / P(0) = 0\}$ est-il principal ? Est-il de type fini ?

8. Exprimer les polynômes symétriques suivants en fonction des polynômes symétriques élémentaires : $X^3 + Y^3 + Z^3$, $X^2Y + XY^2 + X^2Z + XZ^2 + Y^2Z + YZ^2$, $X^2YZ + XY^2Z + XYZ^2$, $X^4 + Y^4 + Z^4$.

9.a. Soient a, b, $c \in \mathbf{C}$. Montrer qu'ils sont en progression arithmétique (resp. géométrique) si et seulement si $27abc = (a+b+c)(9(ab+bc+ac) - 2(a+b+c)^2)$ (resp. $(ab+ac+bc)^3 = abc(a+b+c)^3$).
9.b. Soient α, β, γ, $\delta \in \mathbf{C}$ les racines de $X^4 + X + 1$. Calculer $1/(\alpha-1) + 1/(\beta-1) + 1/(\gamma-1) + 1/(\delta-1)$.
9.c. Soient α, β, γ les racines de $X^3 + 2X^2 - 2X + 5$. Trouver un polynôme de $\mathbf{Z}[X]$ de racines α^3, β^3, γ^3.
9.d. Soit $P = X^3 + 2X^2 + 3X + 4 \in \mathbf{Q}[X]$. Notons α, β, γ ses racines complexes. Déterminer le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$ et $\alpha + \gamma$.
9.e. Soit $P = X^3 + X + 1 \in \mathbf{Q}[X]$. Notons α, β, γ ses racines complexes. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ et, en calculant la division euclidienne de X^4 par P, $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$.

10. Soit A un anneau commutatif noethérien. Un idéal premier de A est dit *minimal* s'il est minimal pour l'inclusion.
10.a. Quels sont les idéaux premiers minimaux d'un anneau intègre ?
10.b. Quels sont les idéaux premiers minimaux de $\mathbf{Z}^n$, pour n entier ≥ 1 ?
10.c. Donner une exemple d'anneau contenant une infinité d'idéaux premiers minimaux.
10.d. Soit Z l'ensemble des idéaux de A tels que pour toute familles $(J_1, ..., J_n)$ d'idéaux premiers minimaux de A, I ne contienne pas $J_1 J_2 ... J_n$. Montrer que, si Z est non vide, il contient un élément maximal pour l'inclusion, noté M.
10.e. Montrer que M n'est pas premier. En déduire qu'il existe deux idéaux I, I' de A tel que $(I + M)(J + M) \subset M$.
10.f. Montrer qu'il existe deux familles$(J_1, ..., J_n)$ et $(J'_1, ..., J'_{n'})$ d'idéaux premiers minimaux de A tels que $I + M$ contienne $J_1 J_2 ... J_n$ et $I' + M$ contienne $J'_1 J'_2 ... J'_{n'}$.
10.g. En déduire que Z est vide et qu'il existe un produit d'idéaux premiers minimaux qui est égal à l'idéal nul.
10.h. En déduire que A ne contient qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.
10.i. Soit I un idéal de A. Montrer qu'il existe une famille $(J_1, ... J_n)$ d'idéaux premiers minimaux de A, contenant tous I, telle que I contienne $J_1 J_2 ... J_n$.

10. Soit K un corps. Soit $P \in K[X]$ sans facteur multiple.
10.a. Soit $Q \in K[X]$ un polynôme sans facteur multiple premier à P. Montrer que le discriminant de PQ est un carré dans K si seulement si le produit des discriminants de P et Q est un carré dans K. Rappelons qu'il se décompose en produits de facteurs irréductibles de degrés 1 ou 2 dans $\mathbf{R}[X]$.
10.b. Supposons $P \in \mathbf{R}[X]$. Rappelons qu'il se décompose en produits de facteurs irréductibles de degrés 1 ou 2 dans $\mathbf{R}[X]$. Soit $Q \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme irréductible de degré 2 (resp. 1) premier à P. Montrer que le discriminant de PQ est de signe opposé (resp. égal) à celui du discriminant de P.
10.c. Supposons encore $P \in \mathbf{R}[X]$. En déduire que le discriminant de P est > 0 si et seulement la décomposition de P dans $\mathbf{R}[X]$ comprend un nombre pair de facteurs de degré 2.
10.d. Soit p un nombre premier $\neq 2$. Supposons que $P \in \mathbf{F}_p[X]$. Montrer que si P est irréductible de degré impair (resp. pair) le discriminant de P est (resp. n'est pas) un carré dans $\mathbf{F}_p$.
10.e. Supposons que $P \in \mathbf{F}_p[X]$. Montrer que le discriminant de P est un carré si et seulement si la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P comprend un nombre pair de facteurs de degré pair.

11. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout a, b, $c \in \mathbf{R}$ tel que $ab + ac + bc = 0$ on ait $P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$.
11.a. Trouver a, b, c non nuls dans $\mathbf{Z}$ tels que $ab + ac + bc = 0$.
11.b. En considérant les triplets ax, bx, cx pour $x \in \mathbf{R}$, montrer que P est somme d'un monôme de degré 2 et d'un monôme de degré 4.

12. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que pour tout réels a, b, c, on ait : $P(a+b-2c) + P(b+c-2a) + P(c+a-2b) = 3(P(a-b) + P(b-c) + P(c-a))$.

13. Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et 3. Considérons le polynôme $P = X^3 + pX + q \in K[X]$. Supposons-le scindé et notons α, β et γ ses racines. On se propose de déterminer ces racines en fonctions de p et q. On suppose que K contient une racine cubique primitive de l'unité j.

13.a. Soit $Q \in K[X]$ de degré 3. Montrer qu'il existe $a \in K^*$ et $b \in K$ tel que $Q(aX+b)$ ait un coefficient du second degré nul.
13.b. Posons $R_j(X_1, X_2, X_3) = (X_1 + jX_2 + j^2X_3)^3 \in K[X_1, X_2, X_3]$. Montrer que l'orbite de R_j sous l'action du groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ contient deux éléments : R_j et un autre élément qu'on notera R_{j^2}.
13.c. Montrer que les polynômes $R_j + R_{j^2}$ et $R_jR_{j^2}$ sont symétriques. Les exprimer en fonctions des polynômes symétriques élémentaires.
13.d. Posons $u = R_j(\alpha, \beta, \gamma) \in K$ et $v = R_{j^2}(\alpha, \beta, \gamma) \in K$. Exprimer $u + v$ et uv en fonction de p et q.
13.e. Exprimer α, β et γ en fonction de u et v.

14. Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et 3. Soit $P = X^4 + aX^2 + bX + c \in K[X]$. Supposons-le scindé de racines α_1, α_2, α_3, α_4. On se propose de déterminer ces racines en fonctions de a, b et c.
14.a. Considérons $X_1X_2 + X_3X_4 \in K[X_1, X_2, X_3, X_4]$. Montrer que l'orbite de ce polynôme sous l'action du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$ contient trois éléments notés U, V et W.
14.b. Établir que le coefficient en X du polynôme $R(X) = (X-U)(X-V)(X-W) \in K[X_1, X_2, X_3, X_4][X]$ est symétriques en X_1, X_2, X_3, X_4. Exprimer ce coefficient en terme des polynômes symétriques élémentaires.
14.c. Exprimer α_1, α_2, α_3 et α_4 en fonction de $U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ et $W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.
14.d. Conclure à l'aide de l'exercice précédent.

15. Soit n un entier > 0. Notons E_n l'ensemble des polynômes de $\mathbf{Z}[X]$ unitaires de degré n et dont toutes les racines sont de module 1.
15.a. Soit ζ une racine de l'unité dans $\mathbf{C}$. Montrer que toutes les racines de son polynôme minimal sur $\mathbf{Q}$ sont de module 1.
15.b. Montrer que E_n est fini.
15.c. Pour $P \in E_n$ de racines x_1, $x_2 ... x_n$, on note P_2 le polynôme unitaire de racines x_1^2, $x_2^2 .... x_n^2$. Montrer que $P_2 \in \mathbf{Z}[X]$.
15.d. En déduire que les racines de P sont des racines de l'unité.
15.e. À quelle condition sur le nombre réel x existe-t-il $P \in \mathbf{Z}[X]$ unitaire tel que $P(e^{2i\pi x}) = 0$.

16. Soit K un corps. Soient P, $Q \in K[X]$ deux polynômes non constants ayant les mêmes racines. Notons p_0 et p_1 le nombre de racines de P et $P-1$ respectivement. Supposons que $P-1$ et $Q-1$ aient eux aussi les mêmes racines. Notons n le degré de P et supposons que le degré de Q est $\leq n$.
16.a. Montrer que le polynôme $P - Q$ admet au moins $p_0 + p_1$ racines.
16.b. Montrer que $D_0 = \text{pgcd}(P, P')$ et $D_1 = \text{pgcd}(P-1, P')$ sont de degrés $n - p_0$ et $n - p_1$ respectivement.
16.c. Montrer que D_0D_1 divise P'. En déduire que $p_0 + p_1 > n$, puis que $P = Q$.

17. Soit n des entiers ≥ 1. Soit K un corps. Considérons des n-uplets $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq n}$ des n-uplets dans K^n. On suppose que la quantité $\prod_i (b_j - a_i)$ ne dépend pas de j. Notons-la c.
17.a. Posons $A = \prod_i (X - a_i)$ et $B = \prod_j (X - b_j)$ dans $K[X]$. Montrer que $A - c = B$.
17.b. En déduire que la quantité $\prod_j (b_j - a_i)$ ne dépend pas de i.

18. Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit n un entier > 0. Posons $A = K[T_1, ..., T_n]$. Considérons la matrice $(T_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(A)$. Notons V son déterminant (dit de *Vandermonde*). Soit $P \in A$. On dit que $P \in A$ est *alterné* si l'action du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ sur P est donnée par la formule $\sigma(P) = \text{sgn}(\sigma)P$.
18.a. Soient i et $j \in \{1, ..., n\}$ deux entiers distincts. Notons $\phi_{i,j}$ l'homorphisme d'anneaux $A \to A$ tel que $\phi_{i,j}(T_k) = T_k$ si $k \neq j$ et $\phi_{i,j}(T_j) = T_i$. Montrer que le noyau de $\phi_{i,j}$ est l'idéal principal engendré par $T_i - T_j$. Montrer que tout polynôme alterné est dans le noyau de $\phi_{i,j}$.
18.b. Montrer que $T_i - T_j$ divise V dans A ($1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$) puis que $V = \prod_{i<j} (T_j - T_i)$.
18.c. Soient i, i', j et $j' \in \{1, ..., n\}$ tels que $\{i, j\} \neq \{i', j'\}$. Montrer qu'on a les égalités d'idéaux de A : $(T_j - T_i) \cap (T_{j'} - T_{i'}) = (T_j - T_i)(T_{j'} - T_{i'})$. En déduire l'égalité d'idéaux de A : $(V) = \cap_{i<j} (T_i - T_j)$.
18.d. Montrer P est alterné si et seulement si il existe un polynôme symétrique $Q \in A$ tel que $P = QV$.
18.e. Montrer que P est invariant sous l'action du groupe alterné $\mathcal{A}_n$ si et seulement si il existe des polynômes symétriques Q et $R \in A$ tels que $P = QV + R$.
18.f. Cette dernière propriété est-elle encore vérifiée si la caractéristique de K est 2 ?

19. Soit r un entier > 0. Une *partition de longueur r* est r-uplet décroissant d'entiers > 0. Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_r)$ est une telle partition, on dit que $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_r$ est le *poids* de λ. On note $\Pi(r)$ l'ensemble des

r-uplets $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_r)$ tels qu'il existe $s \leq r$ avec $(\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_s)$ partition de longueur s. On note $\Pi^+(r)$ les r-uplets de $\Pi(r)$ qui sont strictement décroissants.

Soit n un entier ≥ 1. On rappelle que l'anneau factoriel $\mathbf{Z}[X_1, X_2 ... X_n]$ est muni de l'action du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. On note $\epsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Un polynôme P en n indéterminées est dit *alterné* si on a $\sigma.P = \epsilon(\sigma)P$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On note A_n l'ensemble des polynômes alternés.
19.a. Soit $P \in A_n$. Montrer que P est divisible par $X_i - X_j$ $(i, j, 1 \leq i < j \leq n)$. Posons $A = \prod_{i<j}(X_i - X_j)$.
19.b. Montrer que A_n est un module sur l'anneau des polynômes symétriques engendré par A.
19.c. Soit $R \in \mathbf{Z}[X_1, X_2 ... X_n]$ un polynôme invariant sous l'action des permutations paires mais pas sous $\mathcal{S}_n$. Montrer que l'orbite de R sous $\mathcal{S}_n$ comprend deux éléments, notés R et S.
19.d. Montrer que $R + S$ est symétrique et que $R - S$ est alterné.
19.e. Le polynôme R est-il de la forme $P + AQ$ avec P et Q symétriques ?
19.f. Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_r) \in \Pi(r)$. Posons $A_\lambda = |X_i^{\lambda_j}|_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n} \in \mathbf{Z}[X_1, X_2 ... X_r]$. Montrer que $A_\lambda \in A_n$ est homogène de degré $|\lambda|$. Que se passe-t-il lorsque $\lambda \notin \Pi^+(r)$?
19.i. Posons $\rho = (r-1, r-2 ... 1, 0) \in \Pi(r)$. Factoriser A_ρ.
19.j. Pour k entier $0 \leq k \leq n$, posons $\rho_k = (r, r-1, ..., k+1, k-1, ... 1, 0)$. Calculer A_{ρ_k}.
19.k. Montrer que $(A_\lambda)_{\lambda \in \Pi^+(r)}$ est une base du $\mathbf{Z}$-module A_n.
19.l. Pour $\lambda \in \Pi(r)$, montrer que A_λ / A_ρ est symétrique.
19.m. Montrer que l'application $\Pi(r) \to \Pi^+(r)$ qui à λ associe $\lambda + \rho$ est bijective.
19.n. Pour $\lambda \in \Pi(r)$, le polynôme $A_{\lambda+\rho}/A_\rho$ s'appelle la *fonction de Schur* de λ. Montrer que les fonctions de Schur constituent une base des polynômes symétrique de $\mathbf{Z}[X_1, X_2 ... X_r]$.

20. Soit K un corps commutatif. Soit n un entier > 0. Considérons $L = K((A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, (B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n})$ (corps des fractions rationnelles en $2n^2$ indéterminées).
20.a. Considérons les matrices $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,u \leq n}$, $B = (B_{i,j})_{1 \leq i,u \leq n} \in \mathrm{M}_n(L)$. Donner leurs déterminants et montrer que ces derniers sont non nuls. Les matrices A et B sont-elles inversibles dans $\mathrm{M}_n(L)$?
20.b. Soient M, $N \in \mathrm{M}_n(L)$ inversibles. Montrer que les matrices $XI_n - MN$, $XI_n - NM \in \mathrm{M}_n[L(X)]$ sont conjuguées. En déduire que les polynômes caractéristiques de MN et de NM sont égaux.
20.c. Montrer que le polynôme caractéristique de AB appartient à $K[(A_{i,j})_{1 \leq i,u \leq n}, (B_{i,j})_{1 \leq i,u \leq n}, X]$, puis que le polynôme caractéristique de AB est égal au polynôme caractéristique de BA.
20.d. Soit $A_0 = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B_0 = (\beta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(K)$. Montrer que les polynômes caractéristiques de A_0B_0 et B_0A_0 sont obtenus en évaluant les polynômes caractéristiques de AB et BA respectivement. En déduire que les polynômes caractéristiques de A_0B_0 et B_0A_0 sont égaux.

21. Soit K un corps de caractéristique 0. Soit n un entier ≥ 0. Soient A, $B \in \mathrm{M}_n(K)$,
21.a. Soient P, $Q \in K[X]$ unitaires, de degré n, scindés de racines λ_1,λ_2...λ_n et μ_1,μ_2...μ_n respectivement. Montrer que si, pour tout entier i, $0 \leq i \leq n$, on a $\sum_{j=1}^n \lambda_j^i = \sum_{j=1}^n \mu_j^i$, on a $P = Q$.
21.b. Supposons que pour tout $i \in \{1, 2 ... n\}$, A^i et B^i aient même trace. Montrer que A et B ont même polynôme caractéristique.
21.c. Supposons A^i de trace nulle $(i \in \{1, 2 ... n\})$. Montrer que A est nilpotente.
21.d. Supposons A^i de trace nulle $(i \in \{1, 2 ... n-1\})$. Montrer que A est nilpotente ou diagonalisable.

22. Soit K un corps. Soit n un entier ≥ 1. Soit $F \in K(X_1, X_2 ... X_n)$ une fraction rationnelle symétrique.
22.a. Montrer que F peut s'écrire comme une fraction rationnelle en Σ_1, $\Sigma_2 ... \Sigma_n$.
22.b. Montrer que les fractions rationnelles symétriques constituent un sous-corps L de $K(X_1, X_2 ... X_n)$ isomorphe à $K(X_1, X_2 ... X_n)$.
22.c. Les éléments X_1, X_2... X_n sont-ils algébriques sur L. Donner les polynômes minimaux.
22.d. L'extension $K(X_1, X_2 ... X_n)|L$ est-elle algébrique ? Finie ?

23. Soit n un entier ≥ 1. Soit K un corps algébriquement clos. Soient F_1, F_2... $F_m \in K[X_1, X_2 ... X_n]$ sans zéro commun. On va montrer Z_n par récurrence sur n : *il existe* H_1, H_2... $H_m \in K[X_1, X_2 ... X_n]$ *tels que* $1 = F_1H_1 + F_2H_2 + ... + F_mH_m$ (Version faible du *théorème des zéros*, ou encore *Nullstellensatz*, de Hilbert).
23.a. Montrer Z_1.
23.b. Soit $P \in K[X_1, X_2 ... X_n]$ non nul de degré d. Montrer qu'il existe $(a_1, a_2 ... a_{n-1}) \in K^{n-1}$, $c \in K$ et $Q \in K[X_1, X_2 ... X_n]$ de degré $< d$ en X_n tel que $P(X_1 + a_1X_n, ... X_{n-1} + a_{n-1}X_n, X_n) = cX_n^d + Q$.
23.c. Montrer qu'on peut se ramener au cas où F_1 est unitaire pour montrer Z_n en supposant Z_{n-1}

23.d. Posons $G(Y, X_1, X_2...X_n) = F_2 + YF_3 + ... + Y^m F_{m-2} \in K[Y, X_1, X_2...X_n]$. Montrer qu'il existe A, $B \in K[Y, X_1, X_2...X_n]$ tels que $\mathrm{Res}_{X_n}(F_1, G) = AG + BF_1$.
23.e. Posons $\mathrm{Res}_{X_n}(F_1, G) = P_k(X_1, X_2..., X_{n-1})Y^k + ... + P_0(X_1, X_2..., X_{n-1})$. Montrer que P_0, $P_1...P_k$ n'ont pas de zéro commun, et engendre donc un sous-module contenant 1, par hypothèse de récurrence.
23.f. Montrer que les polynômes P_0, $P_1...P_k$ sont dans l'idéal engendré par F_1, $F_2...$ F_m. En déduire Z_n.
23.g. Soit I un idéal de $K[X_1, X_2...X_n]$. Posons $V(I) = \{(x_1, ..., x_n) \in K^n / f(x_1, ..., x_n) = 0 (f \in I)\}$. Soit $g \in K[X_1, X_2...X_n]$ s'annule sur $V(I)$. Introduisons l'indéterminée supplémentaire X_0. Montrer que les polynômes F_1, $F_2...$ F_m, $1 - X_0 g \in K[X_0, X_1, X_2...X_n]$ sont sans zéro commun. En déduire que si $g \in K[X_1, X_2...X_n]$ s'annule sur V(I), il existe un entier $k > 0$ tel que $g^k \in I$ (véritable théorème des zéros).