Université Paris Diderot — Algèbre – Année 2019-20

M1 mathématiques

Feuille 1

Anneaux

1. Les ensembles suivants sont-ils des anneaux (avec les lois évidentes). Déterminer leurs éléments inversibles.
1.a. L'ensemble des nombres entiers ≥ 0.
1.b. L'ensemble des nombres pairs.
1.c. L'ensemble des nombres rationnels de dénominateur divisible par 10.
1.d. L'ensemble des nombres rationnels de dénominateur premier à 10.
1.e. L'ensemble des nombres rationnels de dénominateur impair.
1.f. L'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$, avec a et b rationnels.
1.g. L'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\pi$, avec a et b rationnels.
1.h. L'ensemble des nombres complexes de la forme $a + bi$, avec a et b entiers.
1.i. L'ensemble des couples (n, m) d'entiers tels que n et m ont même parité.
1.j. L'ensemble des suites à valeurs réelles qui tendent vers 0.
1.k. L'ensemble des suites bornées.
1.l. L'ensemble des fonctions continues $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
1.m. L'ensemble des fonctions croissantes $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
1.n. L'ensemble des fonctions continues par morceaux $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
1.o. L'ensemble des suites à valeurs entières.
1.p. L'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients entiers.
1.q. L'ensemble des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients réels.
1.r. L'ensemble des séries entières à coefficients complexes.
1.s. L'ensemble des séries entières à coefficients complexes qui convergent sur $\mathbf{C}$.
1.rt L'ensemble des polynômes à coefficients réels.
1.u. L'ensembles des polynômes à coefficients réels qui prennent des valeurs entières en 0.
1.v. L'ensemble des éléments de $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ tels qui sont nuls modulo 3.

2. Soit A un anneau. Soient $a, b \in A$ tels que $1-ab$ est inversible (notons c l'inverse). Montrer que $abc = c-1$ et $cab = c - 1$. En déduire que $1 - ba$ est inversible. (On pourra considérer $1 + bca$.)

3. Soit A un anneau. Soit $e \in A$. On dit que e est un *idempotent* de A si on a $e^2 = e$.
3.a. Montrer que, si e est un idempotent, il en est de même de $1 - e$.
3.b. Montrer que, si A est intègre, seuls 0 et 1 sont idempotents. Si A et B sont intègres, quels sont les idempotents de l'anneau produit $A \times B$?
3.c. Lorsque A est l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel E, quels sont les idempotents de A ?
3.d. Supposons A commutatif. Soit $e \in A$ idempotent distinct de 0 et 1. On pose $d = 1 - e$, $B = eA$ et $C = dA$. Montrer que B et C sont des anneaux non nuls. Montrer que $\phi : A \to B \times C$ définie par $\phi(a) = (ba, ca)$ est un isomorphisme d'anneaux. Les anneaux B et C sont-ils des sous-anneaux de A ?

4. Soit A un anneau intègre. Soit $x \in A$, $x \neq 0$. Montrer que l'application $\phi : A \to A$ définie par $\phi(a) = ax$ est un morphisme de groupe injectif. En déduire que si A est fini, alors A est un corps.

5. Soit A un anneau intègre tel que $A[X]$ est principal, où $A[X]$ est l'anneau des polynômes à coefficients dans A. Montrer que A est intègre. En déduire que A est un corps.

6. Soit A un anneau. Soit $a \in A$. On dit que a est *nilpotent* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $a^k = 0$.
6.a. Supposons A commutatif. Montrer que les éléments nilpotents de A constituent un idéal de A. Est-ce encore vrai si A n'est pas commutatif ?
6.b. Quels sont les éléments nilpotents d'un anneau intègre ?
6.c. Soit m un entier ≥ 1. Quels sont les éléments nilpotents de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$?

6.d. Soit $a \in A$ un élément nilpotent. Montrer $1+a$ est inversible.
6.e. Soit K un corps. Soit $P \in K[X]$. Posons $A = K[X]/(P)$. Montrer que A possède un élément nilpotent non nul si et seulement si P est divisible par le carré d'un polynômes irréductible.

7. Soit A un anneau commutatif. Soit n un entier ≥ 1. Soient $a, b \in A$.
7.a. Montrer la formule $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1}) = a^n - b^n$. Est-elle encore vraie dans un anneau non-commutatif ?
7.b. En déduire que si m est un entier qui divise n, on a $a^m - 1$ divise $a^n - 1$. Est-ce encore vrai dans un anneau non-commutatif ?

8. Soit $(G, +)$ un groupe abélien. Notons $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G (c'est-à-dire des morphismes de groupes $G \to G$). Montrer que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau. Réciproquement, si A est un anneau, montrer que pour tout $a \in A$, l'application $x \mapsto ax$ est un endomorphisme de $(A, +)$. En déduire que A est isomorphe à un sous-anneau de $(\mathrm{End}(A), +, \circ)$.

9.a. Montrer que tout anneau fini est de caractéristique finie.
9.b. Donner un exemple d'anneau infini de caractéristique finie.
9.c. Montrer que tout anneau A de caractéristique finie n admet un unique morphisme d'anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to A$, qui de plus est injectif.
9.d. Montrer que tout corps de caractéristique première p admet un sous-anneau isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
9.e. Considérons l'anneau $\prod_{n=1}^{\infty}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. Quelle est sa caractéristique ?

10. Soit E un espace vectoriel. Considérons l'anneau A des endomorphismes linéaires de E. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
10.a. Montrer que $\{u \in A / \mathrm{Im}(u) \subset F\}$ est un idéal à droite de A.
10.b. Montrer que $\{u \in A / F \subset \mathrm{Ker}(u)\}$ est un idéal à gauche de A.
10.c. Montrer que l'ensemble des endomorphismes d'image de dimension finie est un idéal bilatère de A.

11. Soit A un anneau commutatif. Soit I un idéal de A.
11.a. Montrer que l'ensemble $\sqrt{I}$ formé par les éléments a tels qu'il existe n entier > 0 avec $a^n \in I$ est un idéal de A contenant I. Que vaut $\sqrt{\{0\}}$?
11.b. Montrer que $\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$.
11.c. Montrer que $I = \sqrt{I}$ si et seulement si A/I n'a pas d'élément nilpotent.
11.d. Soit J un idéal de A. Montrer que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ et que $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I+J}$.
11.e. Déterminer $\sqrt{6\mathbf{Z}}$. Déterminer $\sqrt{24\mathbf{Z}}$.

12. Soit A un anneau tel que $a^3 = a$ pour tout $a \in A$. Notons Z le centre de A.
12.a. Donner des exemples finis et infinis de tels anneaux. À quels corps finis A peut-il être égal ?
12.b. Déterminer les éléments nilpotents de A. Montrer qu'on a $6 = 0$ dans A.
12.c. Soit $e \in A$ tel que $e^2 = e$. Soit $a \in A$. Posons $b = ea(1-e)$. Calculer b^2.
12.d. En déduire que $ea = ae$, puis que pour tout $x \in A$, on a $x^2 \in Z$.
12.e. Montrer que pour tout $x \in A$, on a $2x \in Z$.
12.f. Montrer que pour tout $x \in A$, on a $3x^2 + 3x = 0$. En deduire que $3x \in Z$, puis que A est commutatif.

13. Soit A un anneau commutatif. Soient I et J des idéaux de A tels que $I + J = A$.
13.a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $I^n + J^n = A$.
13.b. Montrer qu'on a $IJ = I \cap J$.

14. Soit A un anneau commutatif. Notons R l'intersection des idéaux maximaux de A. C'est le *radical de Jacobson* de A.
14.a. Soit $a \in A$. Montrer que $a \in R$ si et seulement si, pour tout $x \in A$, $1 - xa$ est inversible dans A.
14.b. Montrer que R est un idéal de A.
14.c. Supposons que l'image de a dans A/R est inversible. Montrer que a est inversible.
14.d. Soit J un idéal de A tel que $1 + J \subset A^{\times}$. Monter que J est contenu dans R.

15. Soit A un anneau commutatif.
15.a. Supposons que A possède un unique idéal maximal I. Montrer que $A - I = A^{\times}$.
15.b. Supposons que $A - A^{\times}$ soit un sous-groupe additif de A. Démontrer que c'est un idéal de A, puis que c'est l'unique idéal maximal de A.