Université Paris Diderot — Algèbre – Année 2018-19
M1 mathématiques

Feuille 6

Théorie des corps

1. Une extension *quadratique* (resp. *cubique*, *quartique*, *quintique*, *sextique*) d'un corps K est une extension de degré 2 (resp. 3, 4, 5, 6). Une extension *biquadratique* de K est une extension de degré 4 engendrée par deux éléments de degré 2 sur K. Une extension *multiquadratique* est une extension engendrée par des éléments de degré 2 sur K. Une extension *métaquadratique* est obtenue par extensions quadratiques successives.
1.a. Montrer que toute extension quadratique de K est de la forme $K(\alpha)$ avec $\alpha^2 = d \in K$, sauf si la caractéristique de K est 2. Pourquoi $K(\alpha)$ ne dépend-elle que de d ? (D'où l'écriture $K(\sqrt{d})$.)
1.b. Soit $L|K$ une extension cubique. Soit $x \in L - K$. Montrer que P, polynôme minimal de x sur K, est de degré 3. Montrer que le discriminant de P est le carré d'un élément de K si et seulement si P est scindé sur $K(x)$. Si K est de caractéristique 0, toute extension cubique est-elle de la forme $K(\alpha)$ avec $\alpha^3 \in K$?
1.c. Toute extension quartique est-elle une extension biquadratique ? Est-elle métaquadratique ?
1.d. Montrer qu'une extension multiquadratique finie de K est de degré une puissance de 2 sur K. Toute extension finie de K engendrée par des éléments de degré 3 sur K est-elle de degré une puissance de 3 ?
1.e. Soit n un entier ≥ 1. Soit $d \in K$. Soit α algébrique sur K tel que $\alpha^n = d$. À quelle condition l'extension $K(\alpha)$ ne dépend-elle que de d ?

2.a. Déterminer les polynômes minimaux sur $\mathbf{Q}$ de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, et de $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.
2.b. Montrer que $\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. Quel est le degré de cette extension de $\mathbf{Q}$?
2.c. Soient p_1, $p_2 ... p_n$ des nombres premiers > 0 distincts. Montrer par récurrence sur n que $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}+...+\sqrt{p_n}) = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1},\sqrt{p_2}...\sqrt{p_n})$. Donner le degré sur $\mathbf{Q}$ de cette extension et le polynôme minimal de $\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}+...+\sqrt{p_n}$ sur $\mathbf{Q}$.
2.d. Déterminer les polynômes minimaux sur $\mathbf{Q}$ de $i^3\sqrt{2}$, de $i^3\sqrt{2}+1$,
2.e. Soit ζ une racine 7-ème de l'unité dans $\mathbf{C}$. Déterminer les polynômes minimaux sur $\mathbf{Q}$ de ζ, ζ^2, $\zeta+\zeta^{-1}$, $\zeta+\zeta^2+\zeta^4$, $\zeta+i$, $1-\zeta$.
2.f. Quel est le polynôme minimal de π sur $\mathbf{Q}(\zeta(2))$ où $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$? Que vaut $[\mathbf{Q}(\pi) : \mathbf{Q}(\zeta(2))]$?
2.g. Quel le polynôme minimal sur $K(X)$ de $X^3/(X+1)$?

3. Soit $L|K$ une extension de corps. Soit $x \in L$ transcendant sur K.
3.a. Soit $P \in K[X]$ non constant. Montrer que l'extension $K(x)|K(P(x))$ est de degré égal au degré de P.
3.b. Soit $F = (X^2-X+1)^3/(X^2(X-1)^2) \in K(X)$. Montrer que l'extension $K(x)|K(F(x))$ est de degré 6.

4. Soit A un anneau intègre. Un *automorphisme* de A est un homomorphisme d'anneaux bijectif $A \to A$.
4.a. Montrer que $\mathbf{Q}$ et que tout corps fini à p éléments, avec p premier, a pour seul automorphisme l'identité. Est-ce vrai pour les autres corps fini ?
4.b. Soit f un automorphisme de $\mathbf{R}$. Montrer que f est l'identité sur $\mathbf{Q}$. Montrer que l'image par f d'un réel > 0 est > 0. En déduire que f préserve les inégalités. Soit $x \in \mathbf{R}$. En écrivant x comme limite de suites adjacentes de rationnels, montrer que $f(x) = x$. Le corps $\mathbf{C}$ admet-il des automorphismes non triviaux ?
4.c. Supposons que A soit un sous-anneau d'un anneau B. Montrer que les automorphismes de B qui sont l'identité sur A constituent un groupe, noté $\mathrm{Aut}_A(B)$, pour la composition des applications.
4.d. Soient $a \in A^*$ et $b \in A$. Montrer que l'application $P \mapsto P(aX+b)$ appartient à $\mathrm{Aut}_A(A[X])$.
4.e. Soit $\phi \in \mathrm{Aut}_A(A[X])$. Montrer qu'il existe $a \in A^*$ et $b \in A$ tels que $\phi(P) = P(aX+b)$
4.f. En déduire que $\mathrm{Aut}_A(A[X])$ est en bijection avec $A^* \times A$. En déduire une loi de groupe sur $A^* \times A$. (Ne peut-on la retrouver grâce aux matrices 2×2 ?)
4.g. Notons K le corps des fractions de A. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$. Montrer que $F \mapsto F((aX+b)/(cX+d))$ appartient à $\mathrm{Aut}_K(K(X))$. Montrer qu'on a un morphisme de groupe $\mathrm{GL}_2(K) \to \mathrm{Aut}_K(K(X))$ de noyau le groupe des matrices scalaires inversibles. Le groupe quotient de $\mathrm{GL}_2(K)$ par ce noyau est $\mathrm{PGL}_2(K)$.

5. Soit p un nombre premier. Posons $L = \mathbf{F}_p(X,Y)$ et $K = \mathbf{F}_p(X^p, Y^p)$. Considérons l'extension $L|K$.

5.a. Montrer que cette extension est de degré p^2.
5.b. Montrer que pour tout $F \in L$, F est racine de $T^p - F(X^p, Y^p) \in K[T]$. En déduire que l'extension $K(F)|K$ est de degré p au plus et donc que $K(F) \neq L$ (il n'y a pas d'élément primitif).
5.c. Soient $F, G \in K$ tels que $K(X+YF) = K(X+YG)$. Montrer que $K(X+YF) = L$.
5.d. En déduire qu'il existe une infinité de corps intermédiaires entre K et L.

6. Soit E un corps. Soient L et M deux sous-corps de E. Notons X l'ensemble des éléments de E de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i \mu_i$, où $(\lambda_i)_{i\in I}$ et $(\mu_i)_{i \in I}$ sont des familles finies d'éléments de L et M respectivement. Notons LM le sous-corps de E engendré par X. Soit K un sous-corps de $L \cap M$.
6.a. Montrer que X est un sous-anneau de E, qui est égal à LM lorsque $L|L\cap M$ et $M|L\cap M$ sont algébriques.
6.b. Montrer l'inégalité $[LM : L\cap M] \leq [L : L \cap M][M : L\cap M]$ (lorsque ces degrés sont finis).
6.c. On suppose que $[L : L\cap M]$ et $[M : L\cap M]$ sont finis et premiers entre eux. Montrer que $[LM : L\cap M] = [L : L\cap M][M : L \cap M]$.
6.d. Montrer que *(i)* tout ensemble fini d'éléments de L linéairement indépendants sur K l'est sur M si et seulement si *(ii)* tout ensemble fini d'éléments de M linéairement indépendants sur K l'est sur L. (On dit alors que $M|K$ et $L|K$ sont *linéairement disjointes*, ou que M et L sont *linéairement disjoints* sur K).
6.e. Montrer que les extension $\mathbf{Q}(j)$ et $\mathbf{Q}(i)$ de $\mathbf{Q}$ sont linéairement disjointes dans $\mathbf{C}$, où i et j sont des racines primitives 4ème et 3ème de l'unité dans $\mathbf{C}$ respectivement.
6.f. Supposons $M|K$ et $L|K$ linéairement disjointes. Montrer que $L\cap M = K$, $[LM : M] = [L : K]$ et $[LM : L] = [M : K]$.
6.g. Soit $^3\sqrt{2}$ la racine cubique de 2 dans $\mathbf{R}$. Montrer que la famille $(1, ^3\sqrt{2}, (^3\sqrt{2})^2)$ est libre sur $\mathbf{Q}$ mais pas sur $\mathbf{Q}(j^3\sqrt{2})$. Montrer que $\mathbf{Q}(^3\sqrt{2}) \cap \mathbf{Q}(j\,^3\sqrt{2}) = \mathbf{Q}$, mais que les extensions $\mathbf{Q}(^3\sqrt{2})|\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}(j\,^3\sqrt{2})|\mathbf{Q}$ ne sont pas linéairement disjointes.
6.h. On suppose que $[LM : K] = [L : K][M : K]$. Soient $(b_i)_{i\in I}$ une base de L sur K et $(c_j)_{j\in J}$ une base de M sur K. Montrer que $(b_i c_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base de LM sur K. En déduire que L et M sont linéairement disjoints sur K.
6.i. Si $[L : K]$ et $[M : K]$ sont premiers entre eux, montrer que L et M sont linéairement disjoints sur K.
6.j. Supposons que $M = K(x)$ avec x transcendant sur K, et $L|K$ algébrique. Montrer que L et M sont linéairement disjoints sur K.
6.k. Montrer que si x, $y \in E$ sont algébriquement indépendants sur K, les corps $K(x)$ et $K(y)$ sont linéairement disjoints sur K.

7.a. Soit K un corps. Soit x un élément algébrique sur K de degré impair. Montrer que $K(x^2) = K(x)$.
7.b. Soit $L|K$ une extension de degré d. Soit $P \in K[X]$ un polynôme irréductible de degré m premier à d. Montrer que P est irréductible sur L.

8. Soit E l'ensemble des sous-corps de $\mathbf{R}$ ne contenant pas $\sqrt{2}$.
8.a. Montrer que $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{6}) \in E$. Existe-t-il un élément de E contenant ces deux corps ? La réunion des éléments de E forme-t-elle un corps ?
8.b. Montrer que E est inductif pour la relation d'inclusion (*i.e.* toute partie totalement ordonnée de E admet un majorant). En appliquant le lemme de Zorn, montrer qu'il existe un sous-corps K de $\mathbf{R}$ maximal parmi les éléments de E ne contenant pas $\sqrt{2}$. Le corps K est-il unique ?
8.c. Soit $x \in \mathbf{R} - K$. Montrer que $\sqrt{2} \in K(x)$, puis que x est algébrique sur K, puis que $\mathbf{R}|K$ est algébrique.
8.d. Quel est le polynôme minimal de $\sqrt{2}$ sur K ? Montrer que le polynôme $X^4 - 2$ est irréductible sur K. En déduire qu'on a les inclusions strictes $K \subset K(\sqrt{2}) \subset \mathbf{R}$.
8.e. Montrer que le polynôme $X^4 - \sqrt{2}$ est irréductible sur $K(\sqrt{2})$. En déduire que qu'on a les inclusions strictes $K \subset K(\sqrt{2}) \subset K(2^{1/4}) \subset \mathbf{R}$. En itérant cette construction montrer que l'extension $\mathbf{R}|K$ n'est pas finie. Est-elle de type fini ?

9. Soit K un corps. On pose $K[[T]] = K^{\mathbf{N}}$ et on note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n T^n$ la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
9.a. Étendre l'addition et la multiplication de $K[T]$ à $K[[T]]$, faisant ainsi de $K[[T]]$ un anneau intègre.
9.b. Notons $K((T))$ le corps des fractions de $K[[T]]$. Montrer que c'est une extension de $K(T)$.
9.c. Montrer qu'on a $\sum_{n=0}^{\infty} T^n = 1/(1-T)$ dans $K((T))$. En déduire que $K(T) \cap K[[T]] \neq K[T]$.
9.d. Soit I un idéal de $K[[T]]$. En considérant un élément $F \in I$ dont le plus petit terme non nul est de degré minimal parmi les éléments de I, montrer que I est principal et engendré par F. Montrer que tout idéal de $K[[T]]$ est de la forme (T^k) avec k entier ≥ 0.

9.e. Montrer que (T) est l'unique idéal maximal de $K[[T]]$ et que $K[[T]]^* = K[[T]] - (T)$.
9.f. Montrer que le polynôme $X^k - (T+1)$ est irréductible sur $K(T)$. Quel est le degré de l'extension $K(T)[X]/(X^k - (T+1))|K(T)$?
9.h. Supposons dsormais K de caractéristique 0. Considérons $U_k = \sum_{n=0}^{\infty} u_n T^n/n! \in K[[T]]$ tel que $u_0 = 1$, $u_1 = 1/k$, $u_2 = 1/k(1/k-1), \cdots, u_n = 1/k(1/k-1)...(1/k-n+1)....$ Montrer que U_k est une racine de $X^k - (T+1)$. Quel est le degré de l'extension $K(T)(U_k)|K(T)$?
9.i. En déduire que l'extension $K((T))|K(T)$ n'est pas finie.

10. Soit $\bar{\mathbf{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques dans $\mathbf{C}$. Soit $\alpha \in \bar{\mathbf{Q}}$. On dit que α est *totalement réel* (resp. *totalement imaginaire*) si pour tout plongement ϕ de $\mathbf{Q}(\alpha)$ dans $\mathbf{C}$, on a $\phi(\alpha) \in \mathbf{R}$ (resp. $\phi(\alpha) \notin \mathbf{R}$). On dit que α est *totalement positif* si de plus $\phi(\alpha) \geq 0$ pour tout ϕ.
10.a. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques totalement réels est un sous-corps $\bar{\mathbf{Q}}^{\mathbf{R}}$ de $\bar{\mathbf{Q}}$.
10.b. Démontrer que les nombres rationnels sont totalement réels. Lesquels des nombres suivants sont totalement réels : $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $1+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$. Lesquels sont totalement positifs ?
10.c. Soit $L = \bar{\mathbf{Q}}^{\mathbf{R}}(\sqrt{A})$ un sous-corps de $\mathbf{C}$ qui est une extension quadratique de $\bar{\mathbf{Q}}^{\mathbf{R}}$, avec $A \in \mathbf{R}$. Montrer que si A est totalement positif L est totalement réel. En déduire que A n'est pas totalement positif.
10.d. Un sous-corps de $\bar{\mathbf{Q}}$ est dit *totalement réel* si tous ses éléments sont totalement réels. Indiquer des corps quadratique et cubique (i.e. des extensions de $\mathbf{Q}$ de degré 2 et 3 respectivement) qui sont totalement réels, puis de tels corps qui ne sont pas totalement réels.
10.e. Un sous-corps L de $\bar{\mathbf{Q}}$ est dit *corps CM* si $L = K(\alpha)$ avec K totalement réel, $L|K$ quadratique et α totalement imaginaire. Lesquels des corps suivants sont CM : $\mathbf{Q}(i)$, $\mathbf{Q}(i,\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{1+\sqrt{2}})$?
10.f. Soit ζ une racine primitive n-ème de l'unité dans $\mathbf{C}$. Montrer que $\zeta + \zeta^{-1}$ est totalement réel. En déduire que le corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\zeta)$ est un corps CM.

11. Soit K un corps. Soit L une extension non-triviale de K contenue dans $K(X)$.
11.a. Soit $Y \in L - K$. Montrer que X est algébrique sur $K(Y)$, puis sur L. En déduire que $L|K$ est infinie.
11.b. Soit $P(T) \in L[T]$ le polynôme minimal de X sur L. Notons n son degré. Montrer qu'il existe Q_0, $Q_1 ... Q_n \in K[X]$ tels que $Q_0(X)P(T) = \sum_{i=0}^{n} Q_i(X)T^{n-i}$, avec Q_0, $Q_1...Q_n$ premiers entre eux dans leur ensemble.
11.c. Montrer qu'il existe un entier i, avec $1 \leq i \leq n$ tel que Q_i/Q_0 soit non constant. Montrer que $Q_0(X)P(T)$ divise $Q_0(X)Q_i(T) - Q_i(X)Q_0(T)$ dans $K[X,T]$.
11.d. Montrer que le rapport $(Q_0(X)Q_i(T) - Q_i(X)Q_0(T))/Q_0(X)P(T)$ est constant en X et T. En déduire que les degrés en X et T de $Q_0(X)P(T)$ sont égaux.
11.e. En déduire que, si $F = Q_i/Q_0$, on a $L = K(F)$ (*Théorème de Lüroth*).

12. Soit K un corps. Soient $Q(X_1, X_2...X_n) \in K[X_1, X_2...X_n]$ un polynôme homogène de degré 2 (en d'autres termes une forme quadratique) et $L|K$ une extension de degré impair. Supposons que Q ait un zéro dans $L^n - \{0\}$.
12.a. Supposons l'extension $L|K$ monogène. Soit $\alpha \in L$ tel que $L = K(\alpha)$. Soit P le polynôme minimal de α sur K. Notons d son degré. Montrer qu'il existe R_1, $R_2...R_n \in K[X]$ de degrés $< d$, premiers entre eux dans leur ensemble et tels que P divise $Q(R_1, R_2...R_n)$ dans $K[X]$.
12.b. Notons m le maximum des degrés de R_1, $R_2...R_n$ et a_1, $a_2...$ $a_n \in K$ les coefficients de degré m de ces polynômes. Montrer que si $Q(a_1, a_2...a_n) \neq 0$, le polynôme $Q(R_1, R_2...R_n)$ est de degré $2m$ et que $Q(R_1, R_2...R_n)/P$ est de degré $2m - d$.
12.c. Montrer que $Q(R_1, R_2...R_n)/P$ admet un facteur irréductible S de degré impair.
12.d. En déduire qu'il existe une extension $M|K$ de degré impair $< d$ telle que Q ait un zéro dans $M^n - \{0\}$.
12.e. Sans supposer $L|K$ monogène, montrer que Q a un zéro dans $K^n - \{0\}$ (*Théorème de Springer*).

13. Soit p un nombre premier. Soit K un corps de caractéristique p. Soit $a \in K$.
13.a. Montrer que les racines du polynôme $X^p - X + a$ diffèrent par un élément de $\mathbf{F}_p$.
13.b. Montrer que le polynôme $X^p - X + a$ est irréductible ou scindé sur K.

14. Soit $x \in \mathbf{R}$. Soit d un entier ≥ 2. Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que pour une infinité de nombres rationnels p/q avec p et q entiers premiers entre eux on ait : $|x - p/q| < C/q^{d+1}$.
14.a. Soit $P \in \mathbf{Z}[X]$ de degré d. Montrer que, pour presque tout nombre rationnel p/q avec p et q entiers premiers entre eux, on a $|P(p/q)| \geq 1/q^d$.

14.b. En déduire que x n'est pas algébrique de degré d.
14.c. Soient b un entier ≥ 2 et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\{-1, 1\}$. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/b^{n!}$ est transcendant.
14.d. En déduire que l'ensemble des nombres réels transcendants n'est pas dénombrable.
14.e. Montrer que $\mathbf{Z}[X]$ est dénombrable. (On rappelle qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, et que $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.)
14.f. En déduire que l'ensemble des nombres réels algébriques est dénombrable.
14.g. Soit K un corps fini ou dénombrable. Montrer qu'une clôture algébrique de K est dénombrable. En déduire qu'une clôture algébrique de $K(T)$ est dénombrable.

15. Une extension de corps $L|K$ est dite *de type fini* si le corps L est engendré comme corps par la réunion de K et d'un nombre fini d'éléments de L.
15.a. Montrer qu'une extension algébrique de type fini est une extension finie.
15.b. En déduire que si L est algébriquement clos et $L|K$ est de type fini, l'extension $L|K$ est finie.
15.c. Supposons que $K = \mathbf{F}_p$ (resp. $K = \mathbf{Q}$) et que L est une clôture algébrique de K. Montrer que tout ensemble fini de de L engendre un corps fini. En déduire que L n'est pas de type fini sur K.
15.d. Supposons que $K = \mathbf{Q}$ et que L est une clôture algébrique de K. Montrer qu'il existe des éléments de L de degré arbitrairement grand. En en déduire que L n'est pas de type fini sur K.

16. Notons M le corps des fonctions méromorphes $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Il contient le corps $\mathbf{C}(z)$.
16.a. Montrer que la fonction exponentielle est un élément de M transcendant sur $\mathbf{C}(z)$.
16.b. Notons K_1 le sous-corps de M engendré par la fonction exponentielle. Montrer que la fonction $z \mapsto e^{z^2}$ est un élément de M transcendant sur K_1.
16.c. Montrer que l'extension $M|\mathbf{C}(z)$ n'est pas de type fini.
16.d. Montrer que $M - \mathbf{C}(z)$ ne contient aucun élément algébrique sur $\mathbf{C}(z)$.

17. Un corps K est dit *pythagoricien* si et seulement si pour tout $(x, y) \in K^2$ il existe $z \in K$ tel que $x^2 + y^2 = z^2$. Soit E une extension algébrique de K.
17.a. Montrer que, dans un corps pythagoricien, toute somme de carrés est un carré.
17.b. Montrer que $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, tous les corps algébriquement clos et tous les corps de caractéristique 2 sont des corps pythagoriciens et qu'il en est de même du corps des nombres réels algébriques.
17.c. Montrer que les corps finis de caractéristiques > 2 ne sont pas des corps pythagoriciens.
17.d. Montrer que $K(T)$ n'est pas pythagoricien si K n'est pas de caractéristique 2.
17.e. Montrer que le sous-corps de $\mathbf{C}$ engendré par les racines carrées des nombres premiers n'est pas une extension finie de $\mathbf{Q}$. En déduire qu'aucune extension finie de $\mathbf{Q}$ n'est un corps pythagoricien.
17.f. Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille de sous-corps pythagoriciens de E contenant K. Montrer que $\cap_{i\in I} K_i$ est un corps pythagoricien.
17.g. Lorsque E est algébriquement clos, on dit que l'intersection des sous-corps pythagoriciens de E qui contiennent K est la *clôture pythagoricienne* de E. Montrer qu'elle est minimale parmi les sous-corps pythagoriciens de E qui contiennent K. On la note K^{Π}.
17.h. Supposons encore E algébriquement clos. Posons $K_0 = K$, et pour tout entier $n \geq 1$, K_n est le sous-corps de E engendré par K_{n-1} et les racines carrées de $\alpha^2 + 1$ avec α parcourant K_{n-1}. Cela définit ainsi une suite croissante $(K_n)_{n\geq 0}$ de sous-corps de E. Montrer que $K^{\Pi} = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$.
17.i. Supposons que $E = \mathbf{C}$. Montrer que $\mathbf{Q}^{\Pi}$ n'est pas un corps totalement réel. (C'est le *corps de Hilbert.*)
17.j. Supposons encore E algébriquement clos. On rappelle que la *clôture quadratique* de K dans E est obtenue comme $\cup_{n=1}^{\infty} K_n$, où $K_0 = K$ et pour tout entier $n \geq 1$, K_n est le sous-corps de E engendré par K_{n-1} et les racines carrées de α avec α parcourant K_{n-1}. Montrer que la clôture quadratique de K contient K^{Π}. Montrer que cette inclusion est stricte lorsque $K = \mathbf{Q}$.
17.k. Supposons encore E algébriquement clos. Supposons que K soit un corps fini de caractéristique > 2. Montrer que la clôture pythagoricienne de K dans E est égale à sa clôture quadratique.
17.l. Soient K_1 et K_2 deux sous-corps pythagoriciens de E. Le sous-corps K_1K_2 de E engendré par K_1 et K_2 est-il en général pythagoricien ?
17.m. Montrer que les éléments de la clôture pythagoricienne de $\mathbf{R}(T)$ définissent des fonctions à valeurs réelles sur $\mathbf{R}$ privé d'un nombre fini de points.