Feuille 2

Modules – Suites exactes, produits tensoriels

1.a. Soit T un $\mathbf{Z}$-module de torsion. Montrer que $T \otimes \mathbf{Q}$ est nul.
1.b. Soit L un $\mathbf{Z}$-module libre de rang r. Montrer que $L \otimes \mathbf{Q}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension r.
1.c. Soit M un $\mathbf{Z}$-module isomorphe à $\mathbf{Z}^r \times T$, où T est un $\mathbf{Z}$-module de torsion. Montrer que $M \otimes \mathbf{Q}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension r.
1.d. Soit m et n deux entier ≥ 1. Montrer que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ est cyclique d'ordre $\mathrm{pgcd}(n, m)$.

2. Soit A un anneau commutatif. Soit K un corps.
2.a. Montrer $A[X, Y]$ est isomorphe à $A[X] \otimes_A A[Y]$.
2.b. Montrer que l'application $K(X) \otimes_K K(Y) \to K(X, Y)$ est injective mais pas surjective.

3. Soit A un anneau commutatif intègre. Notons K le corps de fractions de A. Soit M un A-module.
3.a. Supposons que $A \neq K$. Montrer que K n'est ni un A-module de type fini, ni un A-module libre. Montrer que K/A n'est pas un A-module libre.
3.b. Montrer que K est un A-module sans torsion et que K/A est un A-module de torsion.
3.c. Montrer $M \otimes_A K$ est un K-espace vectoriel. Montrer qu'il est nul si M est de torsion. Montrer qu'il peut être de dimension finie même lorsque M n'est pas un A-module de type fini. Montrer que si $(b_i)_{i \in I}$ est une base de M comme A-module, $(b_i \otimes 1)_{i \in I}$ est une base de $M \otimes_A K$ comme K-espace vectoriel.

4.a. Soient E et F des K-espaces vectoriels. Soient f et g deux applications linéaires $E \to E$ et $F \to F$ respectivement. Supposons f et g diagonalisables de valeurs propres respectives $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(\mu_j)_{j \in J}$ (comptées avec multiplicités). Montrer que $f \otimes g$ est diagonalisable de valeurs propres $(\lambda_i \mu_j)_{(i,j) \in I \times J}$. Quelle est la trace de $f \otimes g$ lorsque E et F sont de dimensions finies ?
4.b. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Montrer que $E \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Donner un exemple d'application non-diagonalisable $\mathbf{R}$-linéaire $f : E \to E$, telle que $f \otimes 1$ est diagonalisable. Montrer que f et $f \otimes 1$ ont même polynôme caractéristique.

5. Soit A un anneau commutatif.
5.a. Soient M et N deux A-modules. Montrer que les A-modules $\mathrm{Hom}(M, A) \otimes_A N$ et $\mathrm{Hom}(M, N)$ sont isomorphes par l'application $\lambda \otimes n \mapsto (a \mapsto \lambda(a) \otimes n)$.
5.b. Soit M un A-module. Soit I un idéal de A. Montrer que les A-modules $M \otimes_A A/I$ et M/IM sont isomorphes.
5.c. Soient I_1 et I_2 des idéaux de A. Montrer que $I_1 \otimes_A I_2$ est un A-module isomorphe à $I_1 I_2$. Montrer que le A-module $A/I_1 \otimes_A A/I_2$ est isomorphe à $A/(I_1 + I_2)$.
5.d. Existe-t-il un A-module M non nul tel que $M \otimes_A M = 0$?

6. Soit A un anneau commutatif. Soit M un A-module libre de rang fini de base $B = (e_i)_{i \in I}$. Notons $M^* = \mathrm{Hom}(M, A)$ le module dual de M. Notons $B^* = (e_i^*)_{i \in I}$ la famille duale de B.
6.a. Montrer que M^* est libre de base B^*.
6.b. Montrer que $M^* \otimes_A M$ est un A-module libre de base $(e_i^* \otimes e_j)_{(i,j) \in I \times I}$.
6.c. Montrer que $M^* \otimes_A M$ est un A-module isomorphe à $\mathrm{End}(M) = \mathrm{Hom}(M, M)$, par l'application $\lambda \otimes m \mapsto (n \mapsto \lambda(n)m)$.
6.d. Montrer que l'isomorphisme $\mathrm{End}(M) \to M^* \otimes_A M$ composé avec l'application $M^* \otimes_A M \to A$ donnée par $\lambda \otimes x \mapsto \lambda(x)$ n'est autre que la trace lorsque M est libre.

7. Soit A un anneau commutatif. Soit $f : M \to N$ une application linéaire surjective de noyau L. On dit alors qu'on a une *suite exacte courte* $0 \to L \to M \to N \to 0$ de A-modules. On dit qu'elle est *scindée* si f admet une section (un inverse à droite A-linéaire).
7.a. Montrer qu'alors M est isomorphe à $L \times N$.
7.b. Montrer que si A est un corps toute suite exacte courte est scindée. (On admet l'axiome du choix.)
7.c. Montrer que si A est intègre et n'est pas un corps, il existe une suite exacte de A-modules non scindée.

8. Soit A un anneau. Soient M_0, $...M_n$ des A-modules. Pour $i \in \{1, ..., n\}$, soit $f_i : M_{i-1} \to M_i$ un morphisme de A-modules. Si $\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$ $(1 \leq i < n)$ et si f_1 est injective et f_n est surjective, on dit qu'on a une *suite exacte* et on écrit (c'est la situation dans laquelle nous nous plaçons) :

$$0 \to M_0 \to M_1 .... \to M_n \to 0.$$

8.a. Montrer que si A est un corps et M_i un espace vectoriel de dimension d_i $(0 \leq i \leq n)$, on a $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i = 0$. Montrer qu'il en est de même si A est principal et si M_i est libre de rang d_i comme A-module.
8.b. Montrer que si $A = \mathbf{Z}$ et M_i est un groupe abélien fini d'ordre t_i $(0 \leq i \leq n)$, on a $\prod_{i=0}^{n} t_i^{(-1)^i} = 1$.
8.c. Supposons que $A = \mathbf{Z}$ et $M_i = T_i \oplus N_i$, avec T_i fini d'ordre t_i et N_i libre de rang d_i, a-t-on $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i = 0$ et $\prod_{i=0}^{n} t_i^{(-1)^i} = 1$? (On pourra examiner le cas où $n = 2$, $M_0 = M_1 = \mathbf{Z}$, f_1 est la multiplication par 2 et f_2 est la surjection canonique $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.)
8.d. Montrer que si chacun des M_i, sauf peut-être l'un d'entre eux est noethérien, ils sont tous noethériens.
8.e. Soient N_0, $...N_n$ des modules noethériens, montrer que le produit $N_0 \times N_1 \times ... \times N_n$ est noethérien.

9. Soit A un anneau commutatif. Soit un diagramme commutatif de A-modules dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc} & & M_1 & \to & M_2 & \to & M_3 & \to & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \to & N_1 & \to & N_2 & \to & N_3 & & . \end{array}$$

9.a. Construire une application A-linéaire $\delta : \mathrm{Ker}(w) \to \mathrm{Coker}(u)$.
9.b. Montrer qu'elle se prolonge en une suite exacte longue

$$\mathrm{Ker}(u) \to \mathrm{Ker}(v) \to \mathrm{Ker}(w) \to \mathrm{Coker}(u) \to \mathrm{Coker}(v) \to \mathrm{Coker}(w),$$

où, en dehors de δ, les morphismes sont obtenus par restrictions des morphismes ci-cessus.

10. Soit K un corps. Soit E un K-espace vectoriel. Soit u un endomorphisme de E.
10.a. Rappeler comment u fait de E un $K[X]$-module.
10.b. Montrer que si E est de dimension finie comme K-espace vectoriel, E est de type fini comme $K[X]$-module. Notons alors M le polynôme minimal de u. Montrer que E est un $K[X]/(M)$-module et que c'est un $K[X]$-module de torsion.
10.c. Posons $E = K[T]$. Lorsque u est la multiplication par T, montrer que E est un $K[X]$-module libre.
10.d. Posons $E = K[T]$. Lorsque u est la dérivation dans $K[T]$, montrer que E n'est pas de type fini comme $K[X]$-module (montrer que, si c'était le cas, il existerait P_1,$...P_r \in K[T]$ tels que tout élément de $K[T]$ soit combinaison K-linéaire des dérivées successives de P_1,$...P_r$.) Montrer que tout élément de E est de torsion.

11. Soit A un anneau commutatif. Soit P un A-module. On dit qu'il est *projectif* si et seulement si pour tout morphisme $f : P \to M$ de A-modules et tout morphisme surjectif $g : N \to M$ de A-modules, il existe un morphisme de A-modules $h : P \to N$ tel que $f = g \circ h$.

On dit que P est *plat* si le foncteur $\otimes P$ est exact. Autrement dit, si pour toute suite exacte de A-modules $0 \to N \to M \to L \to 0$ on a une suite exacte de A-modules $0 \to N \otimes P \to M \otimes P \to L \otimes P \to 0$.
11.a. Montrer qu'il revient au même de dire que P est projectif et que toute suite exacte courte $0 \to L \to N \to P \to 0$ est scindée.
11.b. Montrer que tout module libre est projectif.
11.c. Montrer que P est projectif si et seulement si le foncteur $A \mapsto \mathrm{Hom}(P, A)$ est exact (*i.e.* il transporte toute suite exacte de A-modules $0 \to N \to M \to L \to 0$ en une suite exacte $0 \to \mathrm{Hom}(P, N) \to \mathrm{Hom}(P, M) \to \mathrm{Hom}(P, L) \to 0$).
11.d. Montrer que P est projectif si et seulement si il existe un A-module Q tel que $L = P \oplus Q$ est un A-module libre. (On dit que P est un *facteur direct* de L.)
11.e. Si $A = \mathbf{Z}$, montrer que P est projectif si et seulement si il est libre.
11.f. Montrer que le module $\mathbf{Z} \times 0$ sur l'anneau $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ est projectif sans être libre.
11.g. Montrer que tout module projectif est plat.
11.h. Montrer que tout module plat est sans torsion.
11.i. Montrer que $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est un $\mathbf{Z}$-module ni projectif ni (*a fortiori*) plat.