Université Paris Diderot
M1 mathématiques Algèbre – Année 2018-19

Feuille 1

Modules – Généralités

1.a. Soit A un anneau commutatif. Soit $\phi : A \to A$ une application A-linéaire (un morphisme de A-modules). Montrer que pour tout $a \in A$, on a $\phi(a) = a\phi(1)$, et donc que ϕ est déterminée par $\phi(1)$.
1.b. Donner un exemple de morphisme d'anneaux $A \to A$ qui ne soit pas un morphisme de A-modules.
1.c. Donner un exemple de morphisme de A-modules $A \to A$ qui ne soit pas un morphisme d'anneaux.
1.d. Soit n un entier ≥ 1. Soit M un A-module. Notons $(e_1, e_2 ... e_n)$ la base canonique de A^n. Soit $\phi : A^n \to M$ une application A-linéaire. Montrer qu'elle est déterminée par le n-uplet $(\phi(e_1), \phi(e_2)...\phi(e_n))$. Montrer que l'application $\phi \mapsto (\phi(e_1), \phi(e_2)...\phi(e_n))$ est surjective.
1.e. Soit N un A module. Soit $(e_1, e_2 ... e_n)$ une famille de N. Montrer que l'application qui à l'application A-linéaire $\phi : N \to M$ associe le n-uplet $(\phi(e_1), \phi(e_2)...\phi(e_n))$ est une bijection (resp. injection, resp. surjection) si $(e_1, e_2 ... e_n)$ une base (resp. famille génératrice, resp. famille libre) de N. Donner des exemples où cette application n'est pas bijective lorsque $(e_1, e_2 ... e_n)$ est libre (resp. génératrice).

2. Soit A un anneau commutatif. Soit M un A-module. Il est dit *simple* s'il ne possède pas de sous-module distinct de $\{0\}$ et M.
2.a. Montrer que A est simple si et seulement si A est l'anneau nul ou est un corps.
2.b. Donner des exemples d'idéaux I de A qui sont des A-modules simples.
2.c. Montrer que tout A-module simple non nul est isomorphe à A/I où I est un idéal maximal de A.
2.d. Soit I un idéal non-trivial de A. Montrer que A/I n'est pas un module libre.
2.e. Supposons que tout A-module est libre. Montrer que A est un corps ou l'anneau nul.

3. Soit A un anneau commutatif. Soit M un A-module. Soit I un idéal de A. Posons $M[I] = \{m \in M / Im = 0\}$ et notons IM le sous-module de M engendré par $\{tm / t \in I, m \in M\}$. Si I est un idéal principal engendré par $a \in A$, on pose $M[a] = M[I]$ et $aM = IM$.
3.a. Montrer que $M[I]$ et IM sont des sous-A-modules de M.
3.b. Supposons I principal. Soit a un générateur de I. Montrer que $M \to M$ qui à m associe am est linéaire. Montrer que son noyau est $M[I]$, que son image est IM, puis que le module $M/M[I]$ est isomorphe à IM.
3.c. Supposons de plus M fini. Montrer que les A-modules $M[I]$ et M/IM sont finis et de même cardinal.
3.d. Soit N un A-module isomorphe à M. Montrer que $M[I]$ (resp. IM) est isomorphe à $N[I]$ (resp. IN).
3.e. En considérant le cas $A = \mathbf{Z}$, $I = p\mathbf{Z}$, avec p premier, $M = \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ et $N = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$, déterminer $M[I]$ et $N[I]$. En déduire que M et N ne sont pas isomorphes.

4.a. Tout sous-module libre d'un module libre admet-il un supplémentaire ?
4.b. Si N est un sous-module de M tel que M/N est libre, montrer que N admet un supplémentaire.

5. Soit A l'anneau des fonctions continues $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et I l'ensemble des éléments de A à support compact.
5.a. Montrer que I est un idéal de A (et donc un sous-module).
5.b. Montrer que I n'est pas de type fini comme A-module.

6. Soit K un corps commutatif. Posons $A = \{P \in K[X] / P = a_0 + a_2X^2 + a_3X^3 + ...\}$.
6.a. Montrer que A est un anneau commutatif.
6.b. Notons I l'idéal de A engendré par $\{X^2, X^3\}$. Est-il principal ? Est-ce un A-module isomorphe à A ?
6.c. Montrer que l'application $A^2 \to I$ qui à (P, Q) associe $PX^2 + QX^3$ est surjective.
6.d. Le noyau de ce morphisme est-il engendré par $(-X^3, X^2)$. Est-ce un A-module isomorphe à A ?

7.a. Soit K un corps. Montrer que l'anneau $A = K[(X_i)_{i \in \mathbf{N}}]$ n'est pas noethérien.
7.b. Montrer que A est un A-module de type fini non noethérien.

8. Soit A un anneau commutatif intègre. Soit n un entier ≥ 0.
8.a. Montrer que $A[X]$ muni de l'action $A \times A[X] \to A[X]$ qui à (a, P) associe aP est un A-module.
8.b. Montrer que les polynômes de $A[X]$ nuls ou de degré $< n$ constituent un A-module libre de rang n.

8.c. Soit $P \in A[X]$ de degré n. Montrer que $(P) = PA[X]$ est un A-module. Le A module quotient $A[X]/(P)$ est-il libre ? (On pourra considérer $A = \mathbf{Z}$ et le polynôme constant égal à 2). Qu'en est-il si P est unitaire ?

9. Soit A un anneau commutatif. Soit M un A-module. Notons $\mathrm{End}_A(M)$ l'ensemble des applications linéaires $A \to A$.
9.a. Rappeler pourquoi c'est un A-module, un anneau. Est-ce une A-algèbre ?
9.b. Montrer que l'application $A \to \mathrm{End}_A(M)$ donnée par $a \mapsto (m \mapsto am)$ est un morphisme d'anneaux.

10. Soit A un anneau commutatif intègre. Soit M un A-module. Soit $m \in M$. On dit que m est de *torsion* s'il existe $a \in A$, $a \neq 0$ tel que $am = 0$. On note M_{tors} l'ensemble des éléments de torsion de M. On dit que M est de *torsion* si $M = M_{\text{tors}}$. On dit que M est *sans torsion* si $M_{\text{tors}} = \{0\}$.
10.a. Montrer que M_{tors} est un sous-A-module de M.
10.b. Montrer que le module quotient M/M_{tors} est sans torsion.
10.c. Montrer que si A est infini, tout A-module fini est de torsion.
10.d. Soient M et N deux A-modules. Soit $f : M \to N$ un morphisme surjectif de A-modules. Notons L le noyau de f. Montrer que si L et N sont de torsion, M est de torsion.
10.e. Montrer que $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est un $\mathbf{Z}$-module de torsion. Montrer que l'ensemble des racines de l'unité dans $\mathbf{C}$ est un $\mathbf{Z}$-module de torsion. L'ensemble des nombres complexes de module 1 est-il un $\mathbf{Z}$-module de torsion ?
10.f. Soient x_1,..., $x_n \in \mathbf{Q}$. Montrer qu'il existe $y \in \mathbf{Q}$ tel que $y \notin \mathbf{Z}x_1 + ... + \mathbf{Z}x_n$. En déduire que $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ n'est pas de type fini.

11. Soit A un anneau commutatif. Soient M et N deux A-modules. Posons $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ l'ensemble des morphismes de A-modules de M vers N. En particulier, $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ s'appelle le *module dual* de M.
11.a. Rappeler comment $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ est muni d'une structure de A-module.
11.b. Montrer que si M est libre de rang n, il en est de même de $\mathrm{Hom}_A(M, A)$.
11.c. Quel est le dual du $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?
11.d. Montrer que $m \mapsto (\phi \mapsto \phi(m))$ est un morphisme de A-modules $M \to (M^*)^*$. Montrer que c'est un isomorphisme lorsque M est libre de rang fini. Est-ce un isomorphisme lorsque $A = \mathbf{Z}$ et $M = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?
11.e. Montrer qu'un morphisme de A-modules $f : M \to N$ donne lieu à un morphisme (dit *dual*) $f^* : N^* \to M^*$. Montrer que si f est surjective, f^* est injective. Si f est injective, f^* est-elle surjective ?

12. Soit A un anneau commutatif. Soient M et N deux A-modules. Soit $f : M \to N$ un morphisme surjectif de A-modules. Notons L le noyau de f.
12.a. Donner un exemple où M et L sont libres sans que N soit libre.
12.b. Montrer que si L et N sont libres, M est libre. Quel est le rang de M ?
12.c. Donner un exemple où M est libre sans que L soit libre. (On pourra penser à $A = M = \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$.)
12.d. Supposons que $M = A^2$ et $N = A$. Montrer que le noyau de f est libre.
12.e. Lorsque M est libre et L est de type fini, on dit que N est de *présentation finie*. Montrer que tout module de type fini sur un anneau principal est de présentation finie.
12.f. Soit K un corps. Supposons que $A = K[(X_i)_{i \in \mathbf{N}}]$. Considérons l'idéal I de A engendré par $\{X_1, X_2, ...\}$. Montrer que l'anneau-quotient A/I est isomorphe à K, ce qui fait de K un A-module. Montrer que K est de type fini comme A-module, mais pas de présentation finie.

13. Soit A un anneau commutatif, M un A-module noethérien et u un morphisme surjectif $M \to M$.
13.a. Montrer que la suite des noyaux de u^n est croissante, pour n entier ≥ 1.
13.b. En déduire que u est injectif (et donc bijectif).
13.c. Si A n'est pas un corps, existe-t-il toujours une application linéaire injective et non surjective $A \to A$?

14. Soit A un anneau commutatif. Soit M un A-module de type fini et I un idéal de A.
14.a. Soit C une matrice carrée à coefficients dans I. Montrer que le déterminant de $\mathrm{Id} + C$ est dans $1 + I$.
14.b. Supposons que $M = IM$. Soit $(m_i)_{i \in J}$ une famille finie de générateurs du A-module M. Montrer qu'il existe une matrice $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in J^2}$ avec $b_{i,j} \in I$ telle que, pour tout $i \in J$, on ait $m_i = \sum_{j \in J} b_{i,j} m_j$. Montrer que le déterminant de $\mathrm{Id} - B$ annule M.
14.c. Supposons que $M = IM$, montrer qu'il existe $a \in I$ tel que $(1 + a)M = 0$.
14.d. En déduire que, si I est l'unique idéal maximal de A, et que $M = IM$, on a $M = \{0\}$.
14.e. Notons R l'intersection de tous les idéaux maximaux de A. Montrer que si $RM = M$, on a $M = \{0\}$.
14.f. On suppose I de type fini et tel que $I^2 = I$. Montrer qu'il existe un générateur e de I tel que $e^2 = e$.