

Feuille 6

Théorie des corps

1. Une extension *quadratique* (resp. *cubique*, *quartique*, *quintique*, *sextique*) d'un corps K est une extension de degré 2 (resp. 3, 4, 5, 6). Une extension *biquadratique* de K est une extension de degré 4 engendrée par deux éléments de degré 2 sur K . Une extension *multiquadratique* est une extension engendrée par des éléments de degré 2 sur K . Une extension *métraquadratique* est obtenue par extensions quadratiques successives.
 - 1.a. Montrer que toute extension quadratique de K est de la forme $K(\alpha)$ avec $\alpha^2 = d \in K$, sauf si la caractéristique de K est 2. Pourquoi $K(\alpha)$ ne dépend-elle que de d ? (D'où l'écriture $K(\sqrt{d})$.)
 - 1.b. Soit $L|K$ une extension cubique. Soit $x \in L - K$. Montrer que P , polynôme minimal de x sur K , est de degré 3. Montrer que le discriminant de P est le carré d'un élément de K si et seulement si P est scindé sur $K(x)$. Si K est de caractéristique 0, toute extension cubique est-elle de la forme $K(\alpha)$ avec $\alpha^3 \in K$?
 - 1.c. Toute extension quartique est-elle une extension biquadratique? Est-elle métraquadratique?
 - 1.d. Montrer qu'une extension multiquadratique finie de K est de degré une puissance de 2 sur K . Toute extension finie de K engendrée par des éléments de degré 3 sur K est-elle de degré une puissance de 3?
 - 1.e. Soit n un entier ≥ 1 . Soit $d \in K$. Soit α algébrique sur K tel que $\alpha^n = d$. À quelle condition l'extension $K(\alpha)$ ne dépend-elle que de d ?
 - 2.a. Déterminer les polynômes minimaux sur \mathbf{Q} de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, et de $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$.
 - 2.b. Montrer que $\mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Quel est le degré de cette extension de \mathbf{Q} ?
 - 2.c. Soient p_1, p_2, \dots, p_n des nombres premiers > 0 distincts. Montrer par récurrence sur n que $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \dots + \sqrt{p_n}) = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n})$. Donner le degré sur \mathbf{Q} de cette extension et le polynôme minimal de $\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \dots + \sqrt{p_n}$ sur \mathbf{Q} .
 - 2.d. Déterminer les polynômes minimaux sur \mathbf{Q} de $i^3\sqrt{2}$, de $i^3\sqrt{2} + 1$,
 - 2.e. Soit ζ une racine 7-ème de l'unité dans \mathbf{C} . Déterminer les polynômes minimaux sur \mathbf{Q} de ζ , ζ^2 , $\zeta + \zeta^{-1}$, $\zeta + \zeta^2 + \zeta^4$, $\zeta + i$, $1 - \zeta$.
 - 2.f. Quel est le polynôme minimal de π sur $\mathbf{Q}(\zeta(2))$ où $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$? Que vaut $[\mathbf{Q}(\pi) : \mathbf{Q}(\zeta(2))]$?
 - 2.g. Quel est le polynôme minimal sur $K(X)$ de $X^3/(X+1)$?
3. Soit $L|K$ une extension de corps. Soit $x \in L$ transcendant sur K .
 - 3.a. Soit $P \in K[X]$ non constant. Montrer que l'extension $K(x)|K(P(x))$ est de degré égal au degré de P .
 - 3.b. Soit $F = (X^2 - X + 1)^3/(X^2(X-1)^2) \in K(X)$. Montrer que l'extension $K(x)|K(F(x))$ est de degré 6.
 4. Soit A un anneau intègre. Un *automorphisme* de A est un homomorphisme d'anneaux bijectif $A \rightarrow A$.
 - 4.a. Montrer que \mathbf{Q} et que tout corps fini à p éléments, avec p premier, a pour seul automorphisme l'identité. Est-ce vrai pour les autres corps fini?
 - 4.b. Soit f un automorphisme de \mathbf{R} . Montrer que f est l'identité sur \mathbf{Q} . Montrer que l'image par f d'un réel > 0 est > 0 . En déduire que f préserve les inégalités. Soit $x \in \mathbf{R}$. En écrivant x comme limite de suites adjacentes de rationnels, montrer que $f(x) = x$. Le corps \mathbf{C} admet-il des automorphismes non triviaux?
 - 4.c. Supposons que A soit un sous-anneau d'un anneau B . Montrer que les automorphismes de B qui sont l'identité sur A constituent un groupe, noté $\text{Aut}_A(B)$, pour la composition des applications.
 - 4.d. Soient $a \in A^*$ et $b \in A$. Montrer que l'application $P \mapsto P(aX + b)$ appartient à $\text{Aut}_A(A[X])$.
 - 4.e. Soit $\phi \in \text{Aut}_A(A[X])$. Montrer qu'il existe $a \in A^*$ et $b \in A$ tels que $\phi(P) = P(aX + b)$.
 - 4.f. En déduire que $\text{Aut}_A(A[X])$ est en bijection avec $A^* \times A$. En déduire une loi de groupe sur $A^* \times A$. (Ne peut-on la retrouver grâce aux matrices 2×2 ?)
 - 4.g. Notons K le corps des fractions de A . Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(K)$. Montrer que $F \mapsto F((aX+b)/(cX+d))$ appartient à $\text{Aut}_K(K(X))$. Montrer qu'on a un morphisme de groupe $\text{GL}_2(K) \rightarrow \text{Aut}_K(K(X))$ de noyau le groupe des matrices scalaires inversibles. Le groupe quotient de $\text{GL}_2(K)$ par ce noyau est $\text{PGL}_2(K)$.
 5. Soit p un nombre premier. Posons $L = \mathbf{F}_p(X, Y)$ et $K = \mathbf{F}_p(X^p, Y^p)$. Considérons l'extension $L|K$.

- 5.a. Montrer que cette extension est de degré p^2 .
- 5.b. Montrer que pour tout $F \in L$, F est racine de $T^p - F(X^p, Y^p) \in K[T]$. En déduire que l'extension $K(F)|K$ est de degré p au plus et donc que $K(F) \neq L$ (il n'y a pas d'élément primitif).
- 5.c. Soient $F, G \in L$ tels que $K(X + YF) = K(X + YG)$. Montrer que $K(X + YF) = L$.
- 5.d. En déduire qu'il existe une infinité de corps intermédiaires entre K et L .
6. Soit E un corps. Soient L et M deux sous-corps de E . Considérons LM le sous-corps de E engendré par les éléments de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i \mu_i$, où $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(\mu_i)_{i \in I}$ sont des familles finies d'éléments de L et M respectivement. Soit K un sous-corps de $L \cap M$.
- 6.a. Montrer que LM est le plus petit sous-corps de E contenant L et M .
- 6.b. Montrer l'inégalité $[LM : L \cap M] \leq [L : L \cap M][M : L \cap M]$ (lorsque ces degrés sont finis).
- 6.c. On suppose que $[L : L \cap M]$ et $[M : L \cap M]$ sont finis et premiers entre eux. Montrer que $[LM : L \cap M] = [L : L \cap M][M : L \cap M]$.
- 6.d. Montrer que (i) tout ensemble fini d'éléments de L linéairement indépendants sur K l'est sur M si et seulement si (ii) tout ensemble fini d'éléments de M linéairement indépendants sur K l'est sur L . (On dit alors que $M|K$ et $L|K$ sont *linéairement disjointes*, ou que M et L sont *linéairement disjoints* sur K).
- 6.e. Montrer que les extensions $\mathbf{Q}(j)$ et $\mathbf{Q}(i)$ de \mathbf{Q} sont linéairement disjointes dans \mathbf{C} , où i et j sont des racines primitives 3ème et 4ème de l'unité dans \mathbf{C} respectivement.
- 6.f. Supposons $M|K$ et $L|K$ linéairement disjointes. Montrer que $L \cap M = K$, $[LM : M] = [L : K]$ et $[LM : L] = [M : K]$.
- 6.g. Soit $\sqrt[3]{2}$ la racine cubique de 2 dans \mathbf{R} . Montrer que la famille $(1, \sqrt[3]{2}, (\sqrt[3]{2})^2)$ est libre sur \mathbf{Q} mais pas sur $\mathbf{Q}(j)$. Montrer que $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) \cap \mathbf{Q}(j\sqrt[3]{2}) = \mathbf{Q}$, mais que les extensions $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}(j\sqrt[3]{2})|\mathbf{Q}$ ne sont pas linéairement disjointes.
- 6.h. On suppose que $[LM : K] = [L : K][M : K]$. Soient $(b_i)_{i \in I}$ une base de L sur K et $(c_j)_{j \in J}$ une base de M sur K . Montrer que $(b_i c_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base de LM sur K . En déduire que L et M sont linéairement disjoints sur K .
- 6.i. Si $[L : K]$ et $[M : K]$ sont premiers entre eux, montrer que L et M sont linéairement disjoints sur K .
- 6.j. Supposons que $M = K(x)$ avec x transcendant sur K , et $L|K$ algébrique. Montrer que L et M sont linéairement disjoints sur K .
- 6.k. Montrer que si $x, y \in E$ sont algébriquement indépendants sur K , les corps $K(x)$ et $K(y)$ sont linéairement disjoints sur K .
- 7.a. Soit K un corps. Soit x un élément algébrique sur K de degré impair. Montrer que $K(x^2) = K(x)$.
- 7.b. Soit $L|K$ une extension de degré d . Soit $P \in K[X]$ un polynôme irréductible de degré m premier à d . Montrer que P est irréductible sur L .
8. Soit E l'ensemble des sous-corps de \mathbf{R} ne contenant pas $\sqrt{2}$.
- 8.a. Montrer que $\mathbf{Q}(\sqrt{3}), \mathbf{Q}(\sqrt{6}) \in E$. Existe-t-il un élément de E contenant ces deux corps ? La réunion des éléments de E forme-t-elle un corps ?
- 8.b. Montrer que E est inductif pour la relation d'inclusion (*i.e.* toute partie totalement ordonnée de E admet un majorant). En appliquant le lemme de Zorn, montrer qu'il existe un sous-corps K de \mathbf{R} maximal parmi les éléments de E ne contenant pas $\sqrt{2}$. Le corps K est-il unique ?
- 8.c. Soit $x \in \mathbf{R} - K$. Montrer que $\sqrt{2} \in K(x)$, puis que x est algébrique sur K , puis que $\mathbf{R}|K$ est algébrique.
- 8.d. Quel est le polynôme minimal de $\sqrt{2}$ sur K ? Montrer que le polynôme $X^4 - 2$ est irréductible sur K . En déduire qu'on a les inclusions strictes $K \subset K(\sqrt{2}) \subset \mathbf{R}$.
- 8.e. Montrer que le polynôme $X^4 - \sqrt{2}$ est irréductible sur $K(\sqrt{2})$. En déduire que qu'on a les inclusions strictes $K \subset K(\sqrt{2}) \subset K(2^{1/4}) \subset \mathbf{R}$. En itérant cette construction montrer que l'extension $\mathbf{R}|K$ n'est pas finie. Est-elle de type fini ?
9. Soit K un corps. On pose $K[[T]] = K^{\mathbf{N}}$ et on note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n T^n$ la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
- 9.a. Étendre l'addition et la multiplication de $K[[T]]$ à $K[[T]]$, faisant ainsi de $K[[T]]$ un anneau intègre.
- 9.b. Notons $K((T))$ le corps des fractions de $K[[T]]$. Montrer que c'est une extension de $K(T)$.
- 9.c. Montrer qu'on a $\sum_{n=0}^{\infty} T^n = 1/(1-T)$ dans $K((T))$. En déduire que $K(T) \cap K[[T]] \neq K[[T]]$.
- 9.d. Soit I un idéal de $K[[T]]$. En considérant un élément $F \in I$ dont le plus petit terme non nul est de degré minimal parmi les éléments de I , montrer que I est principal et engendré par F . Montrer que tout idéal de $K[[T]]$ est de la forme (T^k) avec k entier ≥ 0 .

- 9.e. Montrer que (T) est l'unique idéal maximal de $K[[T]]$ et que $K[[T]]^* = K[[T]] - (T)$.
- 9.f. Montrer que le polynôme $X^k - (T + 1)$ est irréductible sur $K(T)$. Quel est le degré de l'extension $K(T)[X]/(X^k - (T + 1))|K(T)$?
- 9.h. Supposons désormais K de caractéristique 0. Considérons $U_k = \sum_{n=0}^{\infty} u_n T^n / n! \in K[[T]]$ tel que $u_0 = 1$, $u_1 = 1/k$, $u_2 = 1/k(1/k - 1)$, \dots , $u_n = 1/k(1/k - 1)\dots(1/k - n + 1)\dots$. Montrer que U_k est une racine de $X^k - (T + 1)$. Quel est le degré de l'extension $K(T)(U_k)|K(T)$?
- 9.i. En déduire que l'extension $K((T))|K(T)$ n'est pas finie.
10. Soit $\bar{\mathbf{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques dans \mathbf{C} . Soit $\alpha \in \bar{\mathbf{Q}}$. On dit que α est *totalelement réel* (resp. *totalelement imaginaire*) si pour tout plongement ϕ de $\mathbf{Q}(\alpha)$ dans \mathbf{C} , on a $\phi(\alpha) \in \mathbf{R}$ (resp. $\phi(\alpha) \notin \mathbf{R}$). On dit que α est *totalelement positif* si de plus $\phi(\alpha) \geq 0$ pour tout ϕ .
- 10.a. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques totalelement réels est un sous-corps $\bar{\mathbf{Q}}^{\mathbf{R}}$ de $\bar{\mathbf{Q}}$.
- 10.b. Démontrer que les nombres rationnels sont totalelement réels. Lesquels des nombres suivants sont totalelement réels : $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $1 + \sqrt{2}$, $2 + \sqrt{2}$. Lesquels sont totalelement positifs ?
- 10.c. Soit $L = \bar{\mathbf{Q}}^{\mathbf{R}}(\sqrt{A})$ un sous-corps de \mathbf{C} qui est une extension quadratique de $\bar{\mathbf{Q}}^{\mathbf{R}}$, avec $A \in \mathbf{R}$. Montrer que si A est totalelement positif L est totalelement réel. En déduire que A n'est pas totalelement positif.
- 10.d. Un sous-corps de $\bar{\mathbf{Q}}$ est dit *totalelement réel* si tous ses éléments sont totalelement réels. Indiquer des corps quadratique et cubique (i.e. des extensions de \mathbf{Q} de degré 2 et 3 respectivement) qui sont totalelement réels, puis de tels corps qui ne sont pas totalelement réels.
- 10.e. Un sous-corps L de $\bar{\mathbf{Q}}$ est dit *corps CM* si $L = K(\alpha)$ avec K totalelement réel, $L|K$ quadratique et α totalelement imaginaire. Lesquels des corps suivants sont CM : $\mathbf{Q}(i)$, $\mathbf{Q}(i, \sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{1 + \sqrt{2}})$?
- 10.f. Soit ζ une racine primitive n -ème de l'unité dans \mathbf{C} . Montrer que $\zeta + \zeta^{-1}$ est totalelement réel. En déduire que le corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\zeta)$ est un corps CM.
11. Soit K un corps. Soit L une extension non-triviale de K contenue dans $K(X)$.
- 11.a. Soit $Y \in L - K$. Montrer que X est algébrique sur $K(Y)$, puis sur L . En déduire que $L|K$ est infinie.
- 11.b. Soit $P(T) \in L[T]$ le polynôme minimal de X sur L . Notons n son degré. Montrer qu'il existe $Q_0, Q_1 \dots Q_n \in K[X]$ tels que $Q_0(X)P(T) = \sum_{i=0}^n Q_i(X)T^{n-i}$, avec $Q_0, Q_1 \dots Q_n$ premiers entre eux dans leur ensemble.
- 11.c. Montrer qu'il existe un entier i , avec $1 \leq i \leq n$ tel que Q_i/Q_0 soit non constant. Montrer que $Q_0(X)P(T)$ divise $Q_0(X)Q_i(T) - Q_i(X)Q_0(T)$ dans $K[X, T]$.
- 11.d. Montrer que le rapport $(Q_0(X)Q_i(T) - Q_i(X)Q_0(T))/Q_0(X)P(T)$ est constant en X et T . En déduire que les degrés en X et T de $Q_0(X)P(T)$ sont égaux.
- 11.e. En déduire que, si $F = Q_i/Q_0$, on a $L = K(F)$ (*Théorème de Lüroth*).
12. Soit K un corps. Soient $Q(X_1, X_2 \dots X_n) \in K[X_1, X_2 \dots X_n]$ un polynôme homogène de degré 2 (en d'autres termes une forme quadratique) et $L|K$ une extension de degré impair. Supposons que Q ait un zéro dans $L^n - \{0\}$.
- 12.a. Supposons l'extension $L|K$ monogène. Soit $\alpha \in L$ tel que $L = K(\alpha)$. Soit P le polynôme minimal de α sur K . Notons d son degré. Montrer qu'il existe $R_1, R_2 \dots R_n \in K[X]$ de degrés $< d$, premiers entre eux dans leur ensemble et tels que P divise $Q(R_1, R_2 \dots R_n)$ dans $K[X]$.
- 12.b. Notons m le maximum des degrés de $R_1, R_2 \dots R_n$ et $a_1, a_2 \dots a_n \in K$ les coefficients de degré m de ces polynômes. Montrer que si $Q(a_1, a_2 \dots a_n) \neq 0$, le polynôme $Q(R_1, R_2 \dots R_n)$ est de degré $2m$ et que $Q(R_1, R_2 \dots R_n)/P$ est de degré $2m - d$.
- 12.c. Montrer que $Q(R_1, R_2 \dots R_n)/P$ admet un facteur irréductible S de degré impair.
- 12.d. En déduire qu'il existe une extension $M|K$ de degré impair $< d$ telle que Q ait un zéro dans $M^n - \{0\}$.
- 12.e. Sans supposer $L|K$ monogène, montrer que Q a un zéro dans $K^n - \{0\}$ (*Théorème de Springer*).
13. Soit p un nombre premier. Soit K un corps de caractéristique p . Soit $a \in K$.
- 13.a. Montrer que les racines du polynôme $X^p - X + a$ diffèrent par un élément de \mathbf{F}_p .
- 13.b. Montrer que le polynôme $X^p - X + a$ est irréductible ou scindé sur K .
14. Soit $x \in \mathbf{R}$. Soit d un entier ≥ 2 . Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que pour une infinité de nombres rationnels p/q avec p et q entiers premiers entre eux on ait : $|x - p/q| < C/q^{d+1}$.
- 14.a. Soit $P \in \mathbf{Z}[X]$ de degré d . Montrer que, pour presque tout nombre rationnel p/q avec p et q entiers premiers entre eux, on a $|P(p/q)| \geq 1/q^d$.

- 14.b. En déduire que x n'est pas algébrique de degré d .
- 14.c. Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée d'entiers et b un entier ≥ 2 . Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/b^{n!}$ est transcendant.
- 14.d. En déduire que l'ensemble des nombres réels transcendants n'est pas dénombrable.
- 14.e. Montrer que $\mathbf{Z}[X]$ est dénombrable. (On rappelle qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, et que \mathbf{R} n'est pas dénombrable.)
- 14.f. En déduire que l'ensemble des nombres réels algébriques est dénombrable.
- 14.g. Soit K un corps fini ou dénombrable. Montrer qu'une clôture algébrique de K est dénombrable. En déduire qu'une clôture algébrique de $K(T)$ est dénombrable.
15. Une extension de corps $L|K$ est dite *de type fini* si le corps L est engendré comme corps par la réunion de K et d'un nombre fini d'éléments de L .
- 15.a. Montrer qu'une extension algébrique de type fini est une extension finie.
- 15.b. En déduire que si L est algébriquement clos et $L|K$ est de type fini, l'extension $L|K$ est finie.
- 15.c. Supposons que $K = \mathbf{F}_p$ (resp. $K = \mathbf{Q}$) et que L est une clôture algébrique de K . Montrer que tout ensemble fini de L engendre un corps fini. En déduire que L n'est pas de type fini sur K .
- 15.d. Supposons que $K = \mathbf{Q}$ et que L est une clôture algébrique de K . Montrer qu'il existe des éléments de L de degré arbitrairement grand. En déduire que L n'est pas de type fini sur K .
16. Notons M le corps des fonctions méromorphes $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$. Il contient le corps $\mathbf{C}(z)$.
- 16.a. Montrer que la fonction exponentielle est un élément de M transcendant sur $\mathbf{C}(z)$.
- 16.b. Notons K_1 le sous-corps de M engendré par la fonction exponentielle. Montrer que la fonction $z \mapsto e^{z^2}$ est un élément de M transcendant sur K_1 .
- 16.c. Montrer que l'extension $M|\mathbf{C}(z)$ n'est pas de type fini.
- 16.d. Montrer que $M - \mathbf{C}(z)$ ne contient aucun élément algébrique sur $\mathbf{C}(z)$.
17. Un corps K est dit *pythagoricien* si et seulement si pour tout $(x, y) \in K^2$ il existe $z \in K$ tel que $x^2 + y^2 = z^2$. Soit E une extension algébrique de K .
- 17.a. Montrer que, dans un corps pythagoricien, toute somme de carrés est un carré.
- 17.b. Montrer que \mathbf{R} , \mathbf{C} , tous les corps algébriquement clos et tous les corps de caractéristique 2 sont des corps pythagoriciens et qu'il en est de même du corps des nombres réels algébriques.
- 17.c. Montrer que les corps finis de caractéristiques > 2 ne sont pas des corps pythagoriciens.
- 17.d. Montrer que $K(T)$ n'est pas pythagoricien si K n'est pas de caractéristique 2.
- 17.e. Montrer que le sous-corps de \mathbf{C} engendré par les racines carrées des nombres premiers n'est pas une extension finie de \mathbf{Q} . En déduire qu'aucune extension finie de \mathbf{Q} n'est un corps pythagoricien.
- 17.f. Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille de sous-corps pythagoriciens de E contenant K . Montrer que $\bigcap_{i \in I} K_i$ est un corps pythagoricien.
- 17.g. Lorsque E est algébriquement clos, on dit que l'intersection des sous-corps pythagoriciens de E qui contiennent K est la *clôture pythagoricienne* de E . Montrer qu'elle est minimale parmi les sous-corps pythagoriciens de E qui contiennent K . On la note K^{II} .
- 17.h. Supposons encore E algébriquement clos. Posons $K_0 = K$, et pour tout entier $n \geq 1$, K_n est le sous-corps de E engendré par K_{n-1} et les racines carrées de $\alpha^2 + 1$ avec α parcourant K_{n-1} . Cela définit ainsi une suite croissante $(K_n)_{n \geq 0}$ de sous-corps de E . Montrer que $K^{\text{II}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.
- 17.i. Supposons que $E = \mathbf{C}$. Montrer que \mathbf{Q}^{II} n'est pas un corps totalement réel. (C'est le *corps de Hilbert*.)
- 17.j. Supposons encore E algébriquement clos. On rappelle que la *clôture quadratique* de K dans E est obtenue comme $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, où $K_0 = K$ et pour tout entier $n \geq 1$, K_n est le sous-corps de E engendré par K_{n-1} et les racines carrées de α avec α parcourant K_{n-1} . Montrer que la clôture quadratique de K contient K^{II} . Montrer que cette inclusion est stricte lorsque $K = \mathbf{Q}$.
- 17.k. Supposons encore E algébriquement clos. Supposons que K soit un corps fini de caractéristique > 2 . Montrer que la clôture pythagoricienne de K dans E est égale à sa clôture quadratique.
- 17.l. Soient K_1 et K_2 deux sous-corps pythagoriciens de E . Le sous-corps $K_1 K_2$ de E engendré par K_1 et K_2 est-il en général pythagoricien ?
- 17.m. Montrer que les éléments de la clôture pythagoricienne de $\mathbf{R}(T)$ définissent des fonctions à valeurs réelles sur \mathbf{R} privé d'un nombre fini de points.