Université Paris 7-Denis Diderot | MPQ1
Licence 1ère année | Année 2005-06

EXAMEN du 27 juin 2006

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

Trouver les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation

$$z^2 - 3(1+i)z + 4i = 0.$$

On donnera les parties réelles et imaginaires des solutions, ainsi que les modules et des arguments.

Exercice 2

Soit l'application $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ qui à (x, y, z) associe $(x + y - 2z, 2x - y - z, -x + z)$.
1. Démontrer que u est linéaire.
2. Donner sa matrice dans la base canonique.
3. Déterminer le noyau et l'image de u. Quelles sont leurs dimensions ?
4. Donner des bases de l'image et du noyau de u.
5. Existe-t-il $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $u(x, y, z) = (1, 1, 1)$.
6. Quel est le noyau de $u \circ u$?

Exercice 3

Considérons la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ qui à x associe $\sqrt{1 + x^3} - \sqrt{1 - x^3}$.
1. Justifier la définition de f. Démontrer que f est continue.
2. La fonction f est-elle dérivable sur $[0, 1]$? En quels points cette dérivée s'annule-t-elle ?
3. Où la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$? Trouver $x_0 \in [-1, 1]$ tel que $f''(x_0) = 0$?
4. Tracer le graphe de f et donner le tableau de variation. Quelle est l'image de f ?
5. Combien y a-t-il de $x \in [-1, 1]$ tels que $\sin(\pi x) = f(x)$?
6. Rappeler quel est le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction qui à x associe $\sqrt{1 + x}$.
7. En déduire le développement limité à l'ordre 10 de f en 0.

Exercice 4

1. Pour x nombre réel > 0, démontrer les inégalités

$$\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log x < \frac{1}{x}.$$

2. En déduire, pour n entier > 0, les inégalités

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

3. Posons $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et convergente.

Exercice 5

Répondre aux questions ci-dessous en justifiant aussi brièvement que possible par un exemple ou en invoquant le cours.

1. Y a-t-il des fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui sont croissantes, injectives et non continues ?
2. Y a-t-il des fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui sont croissantes, surjectives et non continues ?
3. Y a-t-il des fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui sont croissantes, continues et non injectives ?
4. Y a-t-il des fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui sont strictement décroissantes, continues et non surjectives ?
5. Y a-t-il des fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui sont dérivables, de dérivée > 0 et non injectives ?