Université Paris 7-Denis Diderot MPQ1
Licence 1ère année Année 2005-06

EXAMEN du 26 novembre 2005

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

1. Formuler qu'une application $f : E \to F$ n'est pas surjective.
2. Donner un exemple d'application $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ surjective mais pas injective, puis d'une application $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ injective mais pas surjective.

Exercice 2

Soit z un nombre complexe non nul tel que $\bar{z} = -z^3$. Posons $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbf{R}_+$ et $\theta \in \mathbf{R}$.
1. Calculer les modules de $\bar{z}$ et $-z^3$ en fonction de r et de θ. En déduire que $|z| = 1$.
2. Déterminer quelles sont les valeurs possibles de r et θ. On en déduira les parties réelles et imaginaires des valeurs possibles de z.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par : on a $u_0 = 2005$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.
1. Montrer que si $x \in [3, +\infty[$, on a $\sqrt{2x+3} \in [3, +\infty[$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
3. En déduire qu'elle admet une limite.

Exercice 4

Considérons l'application $u : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ donnée par

$$u(x, y, z) = (x - y + z, z, z).$$

1. Montrer que u est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique B de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer le rang de u. En déduire la dimension du noyau de u. Donner des bases de l'image et du noyau de u.
3. Le noyau et l'image de u sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ qui sont en somme directe ?
4. Posons $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 0, 0)$. Montrer que la famille $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Écrire la matrice P de passage de B à B'. Calculer P^{-1}. En déduire la matrice N de u dans la base B'.
5. Calculer $u(v_1)$, $u(v_2)$ et $u(v_3)$.
6. Soit n un entier ≥ 1. Calculer N^n. En déduire M^n.