Université Paris 7 **Année universitaire 2009/2010**
Fonctions analytiques **M23040**

Examen partiel du 24 Mars 2010
durée 2 heures
Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés
Les exercices sont indépendants

Exercice 1 Le but de cet exercice est de déterminer les *transformations conformes* de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant :

i) f est bijective,

ii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe,

iii) $f^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe.

On veut montrer qu'une transformation conforme de $\mathbb{C}$ est de la forme $f(z) = az + b$ où a et b sont des constantes complexes et $a \neq 0$.
1) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} h : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto az + b. \end{aligned}$$

Montrer que h est une transformation conforme de $\mathbb{C}$.

Soit f une transformation conforme de $\mathbb{C}$.

2) Montrer que $|f(z)| \xrightarrow[z\to\infty]{} +\infty$, c'est-à-dire

$$\forall M > 0, \exists R > 0 \mid \forall z \in \mathbb{C}, |z| > R \Rightarrow |f(z)| > M.$$

Indication. Remarquer que pour tout $M > 0$ la boule fermée $\overline{B}(0, M)$ centrée à l'origine et de rayon M est un compact, puis que f^{-1} est une fonction continue.

3) On note $z_0 \in \mathbb{C}$ l'image réciproque de 0 par f, c'est-à-dire $f(z_0) = 0$. Montrer que le développement de Taylor de f en z_0 est de la forme $f(z) = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$ avec $a_1 \in \mathbb{C}^*$.

4) En déduire que la fonction g définie par

$$z \mapsto g(z) = \frac{z - z_0}{f(z)}$$

est une fonction entière sans zéro.

5) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ |z| > R \Rightarrow |g(z)| < \varepsilon |z|$$

6) En déduire que g est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
Indication. En notant c_n, $n \in \mathbb{N}$, les coefficients du développement de Taylor en 0 montrer à l'aide de la formule intégrale de Cauchy que $c_n = 0$ pour $n \geq 2$.

7) A l'aide des questions 6) et 4), montrer qu'il existe des constantes complexes a et b, avec $a \neq 0$, telles que $f(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière non constante. On note E l'image de f et $\overline{E}$ l'adhérence de E dans $\mathbb{C}$.
1) Montrer que si l'image de f n'est pas dense dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire si $\overline{E} \neq \mathbb{C}$, il existe alors $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$ tels que la boule ouverte $B(z_0, R)$ ne contienne aucun point de l'image de f.

Montrer alors que $z \mapsto \frac{1}{f(z)-z_0}$ est une fonction entière et bornée.

2) En déduire que l'image de f est dense dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire $\overline{E} = \mathbb{C}$.

Exercice 3 Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω contenant 0. On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert.
1) Montrer que $z \mapsto \frac{z}{z+1}$ et $z \mapsto f(z) - f(\frac{z}{2})$ sont holomorphes au voisinage de 0.

2) Montrer que si $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ pour n assez grand alors $f(z) = \frac{z}{z+1}$ sur $\Omega \cap \mathbb{D}$.

3) Montrer que si $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{2n})$ pour n assez grand alors f est constante sur Ω.