Université Paris Diderot — MT1
Licence 1ère année — Année 2008-09

EXAMEN PARTIEL du 22 novembre 2008

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones est interdit. Il est nécessaire de justifier les réponses.

Exercice 1

1. Donner un exemple d'application $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui est injective mais pas surjective.
2. Montrer que l'application $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ qui à (x, y) associe $(x + 2y, 2x + 3y)$ est bijective.

Exercice 2

Soit z un nombre complexe non nul tel que $\bar{z} = -z^3$. Posons $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbf{R}_+$ et $\theta \in \mathbf{R}$.
1. Calculer les modules de $\bar{z}$ et $-z^3$ en fonction de r. En déduire que $|z| = 1$.
2. Déterminer $\{e^{i\theta} \in \mathbf{C} / e^{4i\theta} = -1\}$.
3. Déterminer quelles sont les valeurs possibles de r et θ. On en déduira les parties réelles et imaginaires des valeurs possibles de z.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par : on a $u_0 = 2008$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.
1. Montrer que si $x \in [3, +\infty[$, on a $\sqrt{2x + 3} \in [3, +\infty[$.
2. Montrer que l'application $[3, +\infty[\to \mathbf{R}$ qui à x associe $\sqrt{2x + 3}$ est continue.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
4. En déduire qu'elle admet une limite.
5. Déterminer cette limite.

Exercice 4

Considérons l'application $u : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ donnée par

$$u(x, y, z) = (x - y + z, z, z).$$

1. Montrer que $F = \{(x - y + z, z, z) \in \mathbf{R}^3 / (x, y, z) \in \mathbf{R}^3\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Montrer que $((1, 0, 0), (1, 1, 1))$ est une base de F. Quelle est la dimension de F ?
2. Montrer que $N = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / u(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Trouver une base de N. Quelle est la dimension de N ?
3. Résoudre les systèmes $u(x, y, z) = (a, b, c)$ pour $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ et $(a, b, c) = (3, 2, 1)$. Y a-t-il des valeurs de (a, b, c) pour lesquelles le système a une solution unique ?
4. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Déterminer son rang.