Université Paris 7-Denis Diderot
Licence

Géométrie
Année 2009-10

F. Liret, L. Merel

EXAMEN du 18 juin 2010

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Problème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Soit O un point de $\mathcal{E}$. Soient D_1, D_2 et D_3 trois droites de $\mathcal{E}$ qui sont orthogonales deux à deux et qui passent par O. Soit P_1 un point de $\mathcal{E}$, distinct de O et qui est situé à égales distances d des droites D_1, D_2 et D_3. Notons P_3, P_5 et P_7 les symétriques orthogonaux de P_1 par rapport à D_1, D_2 et D_3 respectivement. Notons P_6, P_4, P_2 et P_8 les symétriques par rapport à O de P_3, P_5, P_7 et P_1 respectivement. On notera d'ailleurs s la symétrie centrale par rapport à O.

Posons $C = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8\}$, $T_1 = \{P_1, P_3, P_5, P_7\}$ et $T_2 = \{P_2, P_4, P_6, P_8\}$.

On appelle *isométrie* d'un sous-ensemble A de $\mathcal{E}$ une isométrie de $\mathcal{E}$ qui induit une bijection de A.

0. Faire un dessin.

1. Démontrer que C est l'ensemble des sommets d'un cube. Quelle est la longueur d'un coté de ce cube ?

2. Démontrer que T_1 et T_2 sont les ensembles des sommets de deux tétraèdres réguliers. Quelle est la longueur des cotés de ces tétraèdres ?

3. Quels sont les isobarycentres de C, T_1 et T_2 ?

4. Démontrer que toute isométrie de C admet O comme point fixe.

5. Soit f une isométrie de C. Démontrer que si $f(P_1) \in T_1$ alors f est une isométrie de T_1. Démontrer ensuite que si $f(P_1) \in T_2$, on a $f(T_1) = T_2$.

6. Soit f une isométrie de T_1. Démontrer que f est une isométrie de C.

7. Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$ telle que $f(T_1) = T_2$. Démontrer que $s \circ f$ est une isométrie de T_1. En déduire que f est une isométrie de C.

8. Soit f une isométrie de T_1 ayant trois points fixes au moins dans T_1. Démontrer que f est l'identité.

9. Soit f une isométrie de T_1 ayant deux points fixes exactement dans T_1. Démontrer que l'ensemble des points fixes de f est un plan, puis que f est la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

10. Soit f une isométrie de T_1 ayant un point fixe exactement dans T_1. Notons P ce point fixe. Démontrer que la droite (OP) est formée de points fixes pour f. Démontrer que le plan passant par les trois points de T_1 distincts de P est stable par f puis que f y admet O comme seul point fixe. En déduire que f est une rotation dont on précisera l'axe et la mesure.

11. Soit f une rotation de $\mathcal{E}$ qui est une isométrie de T_1, sans point fixe dans T_1 et d'axe $\mathcal{D}$. Posons $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ etc. Démontrer que, pour tout point P de T_1, les points P, $f(P)$, $f^2(P)$... sont dans un même plan orthogonal à $\mathcal{D}$. En déduire que f est une symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$. Quelles sont les situations possibles pour l'axe $\mathcal{D}$?

12. Soit f une symétrie orthogonale par rapport à un plan $\mathcal{P}$ qui est une isométrie de T_1 et qui n'a pas de point fixe dans T_1. Démontrer que, pour tout point P de T_1, les points P et $f(P)$ sont dans une même droite orthogonale à $\mathcal{P}$. En déduire qu'il n'existe pas de symétrie orthogonale telle que f.

13. Quelles sont les isométries de T_1 ? On indiquera lesquelles sont des déplacements.

14. Quelles sont les isométries de C ? On indiquera encore lesquelles sont des déplacements.