Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques

Fonctions analytiques
Année 2009-10

R. Lascar, L. Merel, É. Toubiana

EXAMEN du 18 mai 2010

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

1. Déterminer les ensembles $E_1 = \{z \in \mathbf{C} / e^z = 1\}$ et $E_{2i\pi} = \{z \in \mathbf{C} / e^z = 2i\pi\}$.
2. Déterminer l'ensemble F des nombres complexes z tels que $e^{e^z} = 1$.
3. Représenter ces points dans un dessin du plan complexe.
4. L'ensemble F admet-il des points d'accumulation dans $\mathbf{C}$?
5. Montrer que l'ensemble $F^{-1} = \{z^{-1} / z \in F\}$ admet au moins un point d'accumulation dans $\mathbf{C}$.
6. Y a-t-il une fonction entière non nulle qui s'annule en tout élément de F^{-1} ?

Exercice 2

Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leq |\sin(z)|$ $(z \in \mathbf{C})$.
1. Quel est l'ensemble des zéros X de $z \mapsto \sin(z)$?
2. Montrer que la fonction $z \mapsto f(z)/\sin(z)$, définie en dehors de X, se prolonge en une fonction entière.
3. En déduire que f et sin sont proportionnelles (*i.e.* leur rapport est constant).
4. Ce résultat est-il encore valable si on remplace sin par une autre fonction entière ?

Exercice 3

1. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $z \mapsto 1/(1 + z + z^2)$.
2. Quel est le rayon de convergence de cette série ?
3. La fonction $f : z \mapsto e^z/(1 + z + z^2)$ est-elle entière, méromorphe ?
4. Déterminer les résidus de cette fonction.
5. Calculer $\int_{\mathcal{C}(0,2)} f(z)\, dz$. (Rappel : $\int_{\mathcal{C}(0,2)}$ signifie l'intégration le long du chemin $t \mapsto 2e^{2i\pi t}$.)

Exercice 4

1. Démontrer qu'il existe une unique fonction méromorphe f sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+$ qui vérifie

$$f(x) = \frac{x^{2/3}}{(x+1)(x+2)^2}$$

$(x \in \mathbf{R}_- - \{-1, -2\})$.
2. Que valent alors $\lim_{\epsilon>0, \epsilon\to 0} f(x - i\epsilon)$ et $\lim_{\epsilon>0, \epsilon\to 0} f(x + i\epsilon)$, lorsque $x \in \mathbf{R}$ et $x > 0$?
3. Déterminer les pôles et les résidus de f.
4. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2/3}}{(x+1)(x+2)^2}\, dx.$$