Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques

Fonctions analytiques
Année 2009-10

R. Lascar, L. Merel, É. Toubiana

EXAMEN du 15 juin 2010

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(ni) z^n$.

2. La fonction $z \mapsto |z|^2$ est-elle holomorphe sur $\mathbf{C}$?

3. Soit f une fonction entière telle que la fonction $z \mapsto f(z)^2 + f(z) + 1$ est bornée sur $\mathbf{C}$. Montrer que f est constante.

4. Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leq 1/n$ (n entier > 0 et z un nombre complexe tel que $|z| < n$). Montrer que f est constante.

5. Considérons la fonction d'une variable complexe $f : z \mapsto \frac{4z+3}{3z+4}$. Montrer que f est méromorphe sur $\mathbf{C}$. Montrer que $|f(z)| = 1$ lorsque $|z| = 1$. En déduire que $|f(z)| < 1$ lorsque $|z| < 1$.

6. Soient z_1, z_2,...,z_n des nombres complexes distincts. Montrer qu'il existe une fonction entière dont les zéros sont tous simples et sont précisément z_1, z_2,...,z_n. Une telle fonction est-elle unique à une constante multiplicative près ?

7. Existe-t-il une fonction entière qui s'annule exactement en $\{\frac{1}{n}/n \in \mathbf{Z}, n > 0\}$?

8. Soit R un nombre réel > 0. Considérons l'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}(0,R)} \frac{1}{2z^2 - 5z + 2} dz.$$

Pour quelles valeurs de R est-elle définie ? La calculer en fonction de R.

9. Quels sont les pôles et les résidus de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z^2+z+1}$? Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z^2 + z + 1} dz.$$

10. Quel est l'indice du lacet composé des chemins $t \mapsto e^{2i\pi t}$, $t \mapsto 1 + t$, $t \mapsto 2e^{-2i\pi t}$, $t \mapsto 2 - t$ par rapport au point 0 ? (Faire un dessin.)