Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques

Géométrie affine et euclidienne
Année 2009-10
F. Liret, L. Merel

EXAMEN du 14 janvier 2010

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans perpendiculaires de $\mathcal{E}$. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_1$. Soient s_1 et s_2 les symétries orthogonales par rapport à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Soit r la symétrie orthogonale par rapport à une droite $\mathcal{D}$ qui est contenue dans $\mathcal{P}_1$ et orthogonale à $\mathcal{P}_2$. La nature d'une isométrie fait référence à la classification des isométries de l'espace donnée en cours.

1. Quelles sont les natures des isométries $f = s_2 \circ r$ et $g = s_1 \circ t_{\overrightarrow{u}}$?
2. L'isométrie $f \circ g$ est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?
3. Quelle est la nature de l'application linéaire associée $\overrightarrow{f \circ g}$?
4. Quels sont les vecteurs fixes de $\overrightarrow{f \circ g}$?
5. Quels sont les points fixes de $f \circ g$?
6. Quelle est la nature de l'isométrie $f \circ g$?

Exercice 2

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction P. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de $\mathcal{P}$ de centre O. Soient deux points A et B de $\mathcal{C}$, distincts et non diamétralement opposés. Posons $\mathcal{D} = (AB)$. Notons $\mathcal{D}'$ la droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par O et les points U et V d'intersection de $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{C}$. Considérons le cercle $\mathcal{C}'$ symétrique orthogonal de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$; notons O' le centre de $\mathcal{C}'$.

1.a. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u} \in P$ tel que $\mathcal{C}'$ soit l'image de $\mathcal{C}$ par la translation $t_{\overrightarrow{u}}$.

1.b. Posons $E = t_{(-\overrightarrow{u})}(A)$ et $F = t_{(-\overrightarrow{u})}(B)$. Montrer que E et F sont des points de $\mathcal{C}$. Que peut-on dire du quadrilatère $ABFE$?

2. Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A, B, E, F. On pose $N = t_{\overrightarrow{u}}(M)$. Montrer que $\mathcal{D}$ est la hauteur du triangle AMN issue de A.

3. On note Q le symétrique orthogonal de N par rapport à $\mathcal{D}$.

3.a. Montrer que N est un point de $\mathcal{C}'$ et que Q est un point de $\mathcal{C}$.

3.b. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $Q = M$;
(ii) le quadrilatère $OO'NM$ est un rectangle ;
(iii) $M = U$ ou $M = V$.

4.a. Comparer les angles de vecteurs $\widehat{QAB}$ et $\widehat{BAN}$.

4.b. Comparer les angles de droites $\widehat{AQ, AB}$ et $\widehat{MQ, MB}$ lorsque $Q \neq M$.

4.c. Montrer que l'égalité d'angles de droites $\widehat{AB, AN} = \widehat{MN, MB}$ a lieu dans tous les cas (que l'on ait $Q = M$ ou $Q \neq M$).

5.a Montrer que les droites (AN) et (BM) sont perpendiculaires.

5.b Montrer que les droites (AM) et (BN) sont perpendiculaires.

6. Que se passe-t-il si $M \in \{A, B, E, F\}$?

Exercice 3

Soit ABC un triangle d'un plan euclidien $\mathcal{P}$. On suppose ce triangle *équilatéral*, c'est-à-dire que les longueurs des cotés sont égales. Soient A', B' et C' les milieux des segments $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$. Notons O le point de concours des médianes de ABC.

1. Démontrer que le point A est sur la médiatrice du segment $[B, C]$. En déduire que la droite (CC') est une hauteur du triangle.
2. Soient s_A (resp. s_B, resp. s_C) la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AA') (resp. (BB'), resp. (CC')). Démontrer que $s_A(\{A, B, C\}) = \{A, B, C\}$. Idem pour s_B et s_C.
3. Soient r_1 et r_2 les rotations de centre O et de mesures $2\pi/3$ et $4\pi/3$ respectivement. Démontrer que $r_1(\{A, B, C\}) = \{A, B, C\}$ et $r_2(\{A, B, C\}) = \{A, B, C\}$.
4. Soit f une isométrie de $\mathcal{P}$ telle que $f(\{A, B, C\}) = \{A, B, C\}$. Démontrer que f est l'identité ou l'une des cinq isométries suivantes : s_A, s_B, s_C, r_1 ou r_2.