EXAMEN PARTIEL

Premier exercice

Soient A, B, C, A', B' des points deux à deux différents d'un plan affine E. On suppose que les points A', B', C ne sont pas alignés et que les droites $(A'B)$ et (AB') sont parallèles.

Soit $\mathscr{R}$ le repère affine (A', B', C). Soient (α, β, γ) les coordonnées de A et $(\alpha', \beta', \gamma')$ les coordonnées de B dans le repère $\mathscr{R}$.

1. Calculer les équations des droites $(A'B)$ et (AB'). En déduire les coordonnées dans $\mathscr{R}$ de C'', point d'intersection de ces deux droites.

2. Montrer que la parallèle à $(A'B')$ menée par B coupe la droite $(B'C)$ en un point A'' dont on déterminera les coordonnées dans $\mathscr{R}$.

3. Montrer que la parallèle à $(A'B')$ menée par A coupe la droite $(A'C)$ en un point B'' dont on déterminera les coordonnées dans $\mathscr{R}$.

4. En déduire que les points A'', B'', C'' sont alignés si et seulement si A, B, C sont alignés.

Deuxième exercice

Soient E un plan affine euclidien, D et Δ des droites de E, $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\Delta}$.

On note s_D et s_Δ les symétries orthogonales par rapport aux droites D et Δ.

On note $t_{\overrightarrow{u}}$ et $t_{\overrightarrow{v}}$ les translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

On pose $g = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D$ et $h = t_{\overrightarrow{v}} \circ s_\Delta$.

1. On suppose $g \circ h = h \circ g$. Montrer que $\overrightarrow{s_D}(\overrightarrow{\Delta}) = \overrightarrow{\Delta}$. En déduire que D et Δ sont parallèles ou orthogonales.

2. Montrer que $g \circ h = h \circ g$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) $D = \Delta$

(ii) D et Δ sont orthogonales et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

TSVP

Soit E un plan affine euclidien. Pour toute droite δ de E, on note s_δ la symétrie orthogonale par rapport à δ.

Partie I

1. Soient D et D' des droites de E sécantes en un point U.

a) Montrer que si D et D' sont symétriques par rapport à une droite δ, alors $U \in \delta$.

b) Montrer que si δ_1 et δ_2 sont deux droites distinctes telles que $s_{\delta_1}(D) = D'$ et $s_{\delta_2}(D) = D'$, alors δ_1 et δ_2 sont orthogonales (on pourra considérer la composée $s_{\delta_1} \circ s_{\delta_2}$).

2. Soit C un point de E différent de U. On suppose qu'il existe une rotation r de centre C telle que $r(D) = D'$. Montrer que D et D' sont symétriques par rapport à la droite (UC).

Partie II

Soit A, B, C trois points de E non alignés. On note a (resp. b, resp. c) la droite (BC) (resp. (CA), resp. (AB)) et l'on pose

$$\sigma_A = s_b \circ s_a \circ s_c \quad , \quad \sigma_B = s_c \circ s_b \circ s_a \quad , \quad \sigma_C = s_a \circ s_c \circ s_b$$

1. Montrer que σ_A n'a pas de point fixe (on pourra montrer que si P est un point fixe de σ_A, alors le point $Q = s_a \circ s_c(P)$ est différent de P et B est sur la médiatrice de (P, Q)). En déduire qu'il existe une unique droite d_A globalement invariante par σ_A.

On note de même d_B (resp. d_C) l'unique droite globalement invariante par σ_B (resp. σ_C).

2. Montrer que $s_c(d_A) = d_B$.

3. Trouver une rotation r_C de centre C telle que $d_A = r_C(d_B)$.

4. Montrer que les droites d_A et d_B sont parallèles si et seulement si les droites (CA) et (CB) sont orthogonales.

5. On suppose que le triangle ABC n'est pas rectangle et l'on note P, Q, R les projetés orthogonal respectifs de A, B, C sur les cotés a, b, c.

a) Montrer que les droites d_A et d_B sont sécantes en R (utiliser la partie **I**).

b) En déduire que le triangle PQR a ses cotés symétriques par rapport aux cotés du triangle ABC.

Premier exercice

1. La droite $(A'B)$ passe par le point d'intersection A' des droites d'équation $y=0$ et $z=0$, donc son équation est de la forme $py+qz=0$; en écrivant que cette droite passe par A', on trouve qu'une équation de $(A'B)$ est $\gamma' y - \beta' z = 0$.
De même, une équation de (AB') est $\gamma x - \alpha z = 0$. On en déduit que les coordonnées de C'' sont $\frac{1}{s}(\alpha\gamma', \beta'\gamma, \gamma\gamma')$, où $s = \alpha\gamma' + \beta'\gamma + \gamma\gamma'$.

2. La droite $(A'B')$ a pour équation $z=0$, donc toute droite parallèle à $(A'B')$ a une équation de la forme $z=p$. La parallèle à $(A'B')$ menée par B a donc pour équation $z=\gamma'$. On en déduit que les coordonnées de A'' sont $(0, 1{-}\gamma', \gamma')$.

3. De même, la parallèle à $(A'B')$ menée par A a pour équation $z=\gamma$ et les coordonnées de B'' sont $(1{-}\gamma, 0, , \gamma)$.

4. Les points A'', B'', C'' sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 0 & 1{-}\gamma & \alpha\gamma' \\ 1{-}\gamma' & 0 & \beta'\gamma \\ \gamma' & \gamma & \gamma\gamma' \end{vmatrix} = 0$$

ce qui s'écrit $\gamma\gamma'(\gamma'{-}1)(1{-}\alpha{-}\gamma) + \gamma\gamma'(1{-}\gamma)\beta' = 0$, ou encore

$$\gamma\gamma'\big[(1{-}\gamma)\beta' - (1{-}\gamma')\beta\big] = 0$$

en utilisant $1{-}\alpha{-}\gamma = \beta$. Puisque $1{-}\gamma = \alpha{+}\beta$ et $1{-}\gamma' = \alpha'{+}\beta'$, cette condition équivaut à

$$\gamma\gamma'(\alpha\beta' - \alpha'\beta) = 0$$

Remarquons que $\gamma \neq 0$ et $\gamma' \neq 0$, car les points A et B ne sont pas sur la droite $(A'B')$.
Par ailleurs, les points A, B, C sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & 0 \\ \beta & \beta' & 0 \\ \gamma & \gamma' & 1 \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$$

d'où le résultat.

Deuxième exercice

1. Puisque $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{s_D}$ et $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{s_\Delta}$, on a $\overrightarrow{s_D} \circ \overrightarrow{s_\Delta} = \overrightarrow{s_\Delta} \circ \overrightarrow{s_D}$, donc $\overrightarrow{s_D} \circ \overrightarrow{s_\Delta} \circ \overrightarrow{s_D} = \overrightarrow{s_\Delta}$. On en déduit $\overrightarrow{s_D}(\overrightarrow{\Delta}) = \overrightarrow{\Delta}$. Les droites globalement invariantes par la symétrie $\overrightarrow{s_D}$ sont $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D}^{\perp}$, donc $\overrightarrow{\Delta} = \overrightarrow{D}$ ou $\overrightarrow{\Delta} = \overrightarrow{D}^{\perp}$.

2. Supposons $g \circ h = h \circ g$.
<u>Premier cas</u> : D et Δ sont parallèles. Alors $s_D \circ s_\Delta$ est une translation $t_{\overrightarrow{w}}$ telle que $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(\Delta) = D$. Puisque $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\Delta}$, $t_{\overrightarrow{u}}$ et s_D commutent, de même que $t_{\overrightarrow{v}}$ et s_Δ. Par suite

$$t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D \circ s_\Delta \circ t_{\overrightarrow{v}} = g \circ h = h \circ g = t_{\overrightarrow{v}} \circ s_\Delta \circ s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$$
$$t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{w}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{-w}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$$
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$$

Second cas : D et Δ sont orthogonales. Alors la composée $\sigma = s_D \circ s_\Delta = s_\Delta \circ s_D$ est une symétrie par rapport au point d'intersection O de D et Δ. On a

$$t_{\overrightarrow{u}} \circ \sigma \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ \sigma \circ t_{\overrightarrow{u}}$$

$$t_{-\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ \sigma \circ t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{-\overrightarrow{u}} = \sigma$$

donc $t_{\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}}(O) = O$. Il s'ensuit $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont par hypothèse orthogonaux, cela implique $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Réciproquement : si $D = \Delta$, alors $s_D \circ s_\Delta = s_\Delta \circ s_D = \mathrm{id}_E$ donc

$$g \circ h = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D \circ s_\Delta \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}$$
$$h \circ g = t_{\overrightarrow{v}} \circ s_\Delta \circ s_D \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$$

donc $g \circ h = h \circ g$. Supposons D et Δ orthogonales et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Alors $g \circ h = s_D \circ s_\Delta$, $h \circ g = s_\Delta \circ s_D$ et les composés $s_D \circ s_\Delta$ et $s_\Delta \circ s_D$ sont égaux à la symétrie par rapport au point d'intersection de D et Δ.

Troisième exercice

Partie I

1.a) Supposons $s_\delta(D) = D'$. Puisque $U \in D$, on a $s_\delta(U) \in D'$. Puisque $U \in D'$, on a $s_\delta(U) \in D$. Donc $s_\delta(U)$ est le point d'intersection U de D et D'. Ainsi U est fixe par s_δ, donc $U \in \delta$.

1.b) Supposons $s_{\delta_1}(D) = D' = s_{\delta_2}(D)$ et $\delta_1 \neq \delta_2$. La rotation $r = s_{\delta_1} \circ s_{\delta_2}$ n'est pas l'identité et laisse D globalement invariante, donc r est la symétrie par rapport à U. Il s'ensuit que toute droite passant par U est globalement invariante par r. Puisque $U \in \delta_1 \cap \delta_2$ d'après **a)**, on a $\delta_2 = r(\delta_2) = s_{\delta_1}(\delta_2)$. Comme δ_2 n'est pas l'axe de s_{δ_1}, il s'ensuit que δ_2 est orthogonale à δ_1.

2. Soient a et a' les projetés orthogonaux de C sur D et D' (figure 1). Puisque $C \neq U$, on a $a \neq a'$. La droite $r\big((Ca)\big)$ passe par C et est orthogonale à $r(D) = D'$, donc c'est la droite (Ca'). Il s'ensuit $r(a) = a'$, donc $Ca = Ca'$ et C est sur la médiatrice de (a, a'). D'après le théorème de Pythagore, on en déduit $Ua^2 = UC^2 - Ca^2 = UC^2 - Ca'^2 = Ua'^2$, donc $Ua = Ua'$. Ainsi U est sur la médiatrice de (a, a'). La médiatrice de (a, a') est donc la droite (CU). En notant σ la symétrie orthogonale par rapport à la droite (CU), on a $\sigma(a) = a'$. Comme une symétrie orthogonale transforme droites orthogonales en droites orthogonales, il s'ensuit $\sigma(D) = D'$.

Partie II

1. L'application σ_A est la composée de trois symétries orthogonales, donc c'est un antidéplacement. Supposons qu'il existe un point P tel que $\sigma_A(P) = P$. Alors

$$s_a \circ s_c(P) = s_b(P)$$

donc $B \in b$, ce qui est impossible car A, B, C ne sont pas alignés.
On a $BP = BQ$ et $P \neq Q$, donc B appartient à la médiatrice de (P, Q). Puisque $Q = s_b(P)$, la médiatrice de (P, Q) est b : c'est une contradiction.

Ainsi σ_A est un glissement, donc il existe une unique droite d_A globalement invariante par σ_A.

2. On a $\sigma_B\big(s_c(d_A)\big) = s_c \circ s_b \circ s_a \circ s_c(d_A) = s_c \circ \sigma_A(d_A) = s_c(d_A)$.
La droite $s_c(d_A)$ est globalement invariante par σ_B, donc $s_c(d_A) = d_B$.

3. La composée $r_C = s_b \circ s_a$ est une rotation de centre C et l'on a $d_A = \sigma_A(d_A) = r_C \circ s_c(d_A) = r_C(d_B)$, d'après la question précédente.

4. Les droites d_B et $d_A = r_C(d_B)$ sont parallèles si et seulement si la rotation r_C est la symétrie par rapport à C. Dans ce cas, toute droite passant par C est globalement invariante par r_C et l'on a $s_b(a) = s_b \circ s_a(a) = r_C(a) = a$. La droite a est globalement invariante par s_b et n'est pas l'axe de s_b, donc a est orthogonale à b. Réciproquement, si les droites a et b sont orthogonales, alors la composée $s_b \circ s_a$ est la symétrie par rapport à C, donc les droites d_B et $d_A = r_C(d_B)$ sont parallèles.

5.a) Par hypothèse, les droites d_A et d_B sont sécantes en un point U. On a $s_c(d_A) = d_B$, donc $U \in c$ (partie I, question 1.a). Puisque $U \in c$ et $C \notin c$, on a $C \neq U$. Comme $d_A = r_C(d_B)$, on en déduit (partie I, question 2) que d_A et d_B sont symétriques par rapport à la droite (UC). Comme la droite c n'est pas l'axe (UC), les droites c et (UC) sont orthogonales et sécantes en U (partie I, question 1.b). Ainsi U est le projeté orthogonal de C sur la droite $c = (AB)$, donc $U = R$.

5.b) D'après **a)**, on a $d_A \cap d_B = \{R\}$ et de même $d_B \cap d_C = \{P\}$, $d_C \cap d_A = \{Q\}$. Puisque le triangle ABC n'est pas rectangle, les points P, Q, R sont deux à deux différents, donc (figure 2)

$$d_B = (PR) \quad , \quad d_A = (RQ) \quad \text{et} \quad d_C = (PQ)$$

D'après la question **2**, les cotés (RP) et (RQ) du triangle PQR sont symétriques par rapport au coté $c = (AB)$ du triangle ABC. De même, (QR) et (QP) sont symétriques par rapport à (AC), et (PQ) et (PR) sont symétriques par rapport à (BC).

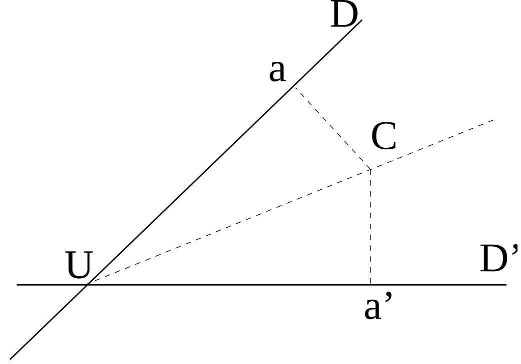

figure 1

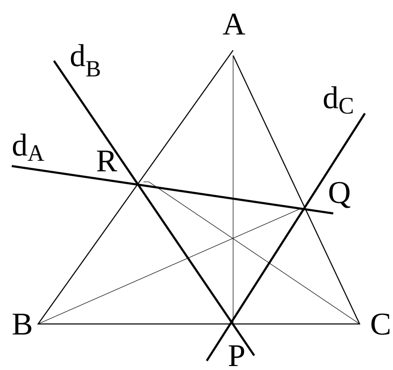

figure 2