Université Paris Diderot
Licence 1ère année

MT1
Année 2008-09

EXAMEN du 5 janvier 2009

Durée : 3 h

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Il est nécessaire de justifier les réponses. Ne pas donner de réponse à une question est préférable à une réponse absurde.

Exercice 1

Donner un exemple d'application $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui est injective mais pas surjective.

Exercice 2

Donner le module, un argument, les parties réelles et imaginaires des nombres complexes z qui vérifient $z^3 = 2i$.

Exercice 3

Posons, dans $\mathbf{R}^3$, $u_1 = (1,1,2)$, $u_2 = (1,2,1)$, $u_3 = (0,1,-1)$, $v_1 = (2,1,1)$, $v_2 = (1,1,2)$, $v_3 = (1,0,-1)$. Notons E et F respectivement les espaces vectoriels engendrés par les familles (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3).

1. Les familles (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) sont-elles libres ?
2. Donner des bases et les dimensions de E et F.
3. Donner des bases et les dimensions de $E \cap F$ et $E + F$.
4. Les sous-espaces vectoriels E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$?

Exercice 4

Considérons la fonction $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ qui à x associe $\sqrt{1+x^4} - \sqrt{1-x^4}$.

1. Justifier le domaine de définition de f.
2. La fonction f est-elle continue ?
3. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer f'. Est-elle dérivable en 1 et -1 ? Déterminer $\{x \in]-1,1[/ f'(x) = 0\}$.
4. Tracer le graphe de f et donner le tableau de variation. Quelle est l'image de f ?
5. Rappeler quel est le développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ en 0.
6. En déduire le développement limité à l'ordre 8 de f en 0.

Exercice 5

Soit f la fonction $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ qui à x associe $\sin(x)/(1+x^2)$.

1. Démontrer que f est bornée, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$?
2. En quels points f est-elle nulle ? Démontrer que la dérivée de f s'annule trois fois au moins sur l'intervalle $[0, 3\pi]$.
3. En déduire que la dérivée seconde de f s'annule deux fois au moins sur l'intervalle $[0, 3\pi]$ puis que la dérivée troisième de f s'annule sur l'intervalle $[0, 3\pi]$.
4. Rappeler quel est le développement limité à l'ordre 5 de la fonction sinus en 0. Déduire de cela un développement limité à l'ordre 5 de f en 0.

Exercice 6

Soit $k \in \{1,2,3\}$. Considérons $\gamma_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ qui à t associe $(x(t), y(t)) = (t^3, t^k)$. Tracer la courbe de γ_k. Pour quelles valeurs de k cette courbe admet-elle un point de rebroussement ?