Université Paris 7 – Denis Diderot
M2 Mathématiques fondamentales
M. Dimitrov – L. Merel

Année 2009-10
Introduction aux formes automorphes

EXAMEN du 4 mars 2010

Durée : **3h**

Soit p un nombre premier ≥ 5. Notons $\mathcal{H}$ le demi-plan supérieur. Notons $\Gamma_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/p|c \right\}$. Soit k est un nombre entier > 0. Pour f fonction $\mathcal{H} \to \mathbf{C}$ et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ de déterminant > 0, on pose $f_{|_k\gamma}(\tau) = \frac{(ad-bc)^{k/2}}{(c\tau+d)^k} f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})$. On appelle *forme modulaire holomorphe (resp. parabolique) de poids k pour* $\Gamma_0(p)$ une fonction holomorphe $f : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$ telle que $f_{|_k\gamma} = f$ (pour tout $\gamma \in \Gamma_0(p)$) et telle que $f_{|_k\gamma}(iy)$ a une limite (resp. tend vers 0) lorsque $y \to +\infty$ (pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q})$). On note $S_k(\Gamma_0(p))$ l'espace vectoriel complexe formé par les formes modulaires paraboliques de poids k pour $\Gamma_0(p)$. Pour n entier ≥ 0, et $f : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe 1-périodique, on note $a_n(f)$ le n-ème coefficient du q-développement de f donné par $f(\tau) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n(f) q^n$, où $q = e^{2i\pi\tau}$. On note E_k la série d'Eisenstein de poids k. Rappelons que son q-développement est donné par la série $1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$, où B_k est le k-ème nombre de Bernoulli et où $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$. Elle est à coefficients p-entiers (*i.e.* rationnels et de dénominateurs premiers à p) si $k = p-1$. On dit que deux formes modulaires de q-développements p-entiers $\sum_n a_n q^n$ et $\sum_n b_n q^n$ sont *congrues modulo p^m* si on a $a_n \equiv b_n \pmod{p^m}$ (pour tout $n \geq 0$).

I

Soit $f \in S_k(\Gamma_0(p))$.
1. Montrer que $\Gamma_0(p)$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.
2. Montrer que $R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}, 0 \leq i < p \right\}$ est un système de représentants de $\Gamma_0(p) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.
3. Si f est non nulle, montrer que k est pair.
4. Posons $W.f = f_{|_k w}$ où $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $W.f \in S_k(\Gamma_0(p))$ et que $W.(W.f) = f$.
5. On pose $\mathrm{Tr}(f) = \sum_{\gamma\in R} f_{|_k\gamma}$. Montrer que c'est une forme modulaire parabolique de poids k pour $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, indépendante du choix du système de représentants R considéré en 2.
6. Soit n un entier ≥ 1. Montrer que $a_n(\mathrm{Tr}(f)) = a_n(f) + p^{1-k/2} a_{np}(W.f)$. (Indication : montrer la formule équivalente où f est remplacée par $W.f$.)

II

On suppose désormais que $k = 2$, f est de q-développement p-entier et $a_1(f) = 1$. On pose $g = E_{p-1} - p^{(p-1)/2} W.E_{p-1}$.
1. Montrer qu'on a $a_{np}(W.f) = -a_n(f)$.
2. Montrer qu'on a $W.E_{p-1}(\tau) = p^{(p-1)/2} E_{p-1}(p\tau)$. En déduire que g est à coefficients p-entiers et que le q-développement de $W.g$ est congru à 0 modulo $p^{(p+1)/2}$.
3. Montrer que $\mathrm{Tr}(fg)$ est à coefficients p-entiers.
4. Montrer que les formes modulaires f et $\mathrm{Tr}(fg)$ sont congrues modulo p.
5. En déduire que la forme modulaire f est congrue modulo p à une forme modulaire de poids $p+1$ pour $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.
6. Supposons que $p = 11$. Montrer que f est congrue à Δ modulo 11. En déduire que le q-développement de f est congru à $q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2(1-q^{11n})^2$ modulo 11.

III

Soit m un entier ≥ 0.
1. Montrer que le q-développement de g^{p^m} est congru à 1 modulo p^{m+1}.
2. Montrer que le q-développement de $W.(g^{p^m})$ est congru à 0 modulo p^{m+1}.
3. Considérons la forme modulaire $f_m = \mathrm{Tr}(fg^{p^m})$. Quel est son poids k_m ? Quelle est la limite de la suite $(k_m)_{m\geq 1}$ dans $\mathbf{Z}_p$?
4. Montrer que les formes modulaires f et f_m sont congrues modulo p^{m+1}. Soit n un entier ≥ 1. Quelle est la limite de la suite $(a_n(f_m))_{m\geq 1}$ dans $\mathbf{Z}_p$?

IV

Posons $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ opère à droite sur $\Gamma_0(p)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

1. Montrer que l'application qui à $\Gamma_0(p)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe la classe de (c, d) modulo p définit une bijection entre $\Gamma_0(p)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ et $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_p) = (\mathbf{F}_p^2 - \{(0,0)\})/\mathbf{F}_p{}^*$ (où $\lambda \in \mathbf{F}_p^*$ agit sur $(u, v) \in (\mathbf{F}_p^2 - \{(0,0)\})$ par $\lambda.(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$). Cela fait de $\mathbf{F}_p[\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_p)]$ un $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-module.
2. Notons M le sous-$\mathbf{F}_p$ espace-vectoriel de $\mathbf{F}_p[X, Y]$ formé par les polynômes homogènes de poids $p - 1$. Soit $P \in M$. Soit $(u, v) \in (\mathbf{F}_p^2 - \{(0,0)\})$. Montrer que $P(u, v)$ ne dépend que de la classe x de (u, v) dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_p)$. Notons le $P(x)$.
3. Montrer que l'application $M \to N = \mathbf{F}_p[\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_p)]/(\mathbf{F}_p \sum_{x\in\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_p)}[x])$, qui à P associe $\sum_{x\in\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_p)} P(x)[x]$ est un isomorphisme de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-modules.
4. En déduire que les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^1(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), M)$ et $\mathrm{H}^1(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), N)$ sont isomorphes.
5. Peut-on déduire de cette observation le résultat prouvé en II.4 ? On pourra esquisser une argumentation.