Université Paris 7-Denis Diderot
Licence 1ère année

MPQ1
Année 2005-06

EXAMEN du 3 janvier 2006

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

1. Soit f une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $f(0) = 0$. Lesquelles des assertions suivantes signifient que f est continue en 0 ?
(A) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x| < \epsilon$ entraîne $|f(x)| < \eta$;
(B) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x| < \eta$ entraîne $|f(x)| < 2\epsilon$;
(C) Pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $|x| < \epsilon$ entraîne $|f(x)| < \eta$;
(D) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x| < \eta$ entraîne $|f(x)| \leq \epsilon$;
(E) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x| < 2\eta$ entraîne $|f(x)| < \epsilon$.
2. Donner un exemple d'application $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui n'est pas continue en 0.

Exercice 2

1. Donner la partie réelle, la partie imaginaire, le module et un argument des nombres complexes z vérifiant $z^4 = 2$.

Exercice 3

Pour tout nombre réel t, posons

$$M(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & -te^t \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

1. Soient $t, t' \in \mathbf{R}$. Démontrer qu'on a $M(t + t') = M(t)M(t')$.
2. Calculer $M(0)$. En déduire que $M(t)$ est toujours inversible et calculer son inverse.
3. Notons f_t l'application linaire de $\mathbf{R}^3$ de matrice dans la base canonique égale à $M(t)$. Montrer que $\{v \in \mathbf{R}^3 / f_t(v) = e^t v\}$ est un espace vectoriel dont on déterminera une base.

Exercice 4

Soit f la fonction $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ qui à x associe $\cos(x)/(1+x^2)$.
1. Démontrer que f est bornée, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$?
2. En quels points f est-elle nulle ? Démontrer que la dérivée de f s'annule deux fois au moins sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
3. En déduire que la dérivée seconde de f s'annule sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

Exercice 5

1. Rappeler le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction tangente.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction qui à x associe $\mathrm{tg}(x)^2$.
3. Démontrer que la quantité $\frac{1}{\mathrm{tg}(x)^2} - \frac{1}{x^2}$ tend vers une limite, que l'on calculera, lorsque x tend vers 0.
4. Quelle est la limite, si elle existe, de $|\frac{1}{\mathrm{tg}(x)} + \frac{1}{x}|$ lorsque x tend vers 0 ? En déduire la limite, lorsque x tend vers 0, de $\frac{1}{\mathrm{tg}x} - \frac{1}{x}$. (On pourra utiliser la formule $|\frac{1}{\mathrm{tg}(x)^2} - \frac{1}{x^2}| = |\frac{1}{\mathrm{tg}(x)} + \frac{1}{x}||\frac{1}{\mathrm{tg}(x)} - \frac{1}{x}|$.)