Théorie des représentations et théorie de Lie
TD 11

Symétrie et R-matrice

Soit U l'algèbre enveloppe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. On écrit $E^{(j)} = E^j/[j]!$ et $F^{(j)} = F^j/[j]!$, $j \in \mathbb{N}$.

Soient Δ une comultiplication $\Delta(E) = E\otimes 1 + K\otimes E$, $\Delta(F) = F\otimes K^{-1} + 1\otimes F$, $\Delta(K) = K\otimes K$, et $\bar{\Delta}$ une autre comultiplication $\bar{\Delta}(E) = E\otimes 1 + K^{-1}\otimes E$, $\bar{\Delta}(F) = F\otimes K + 1\otimes F$, $\bar{\Delta}(K) = K\otimes K$.

1 Vérifier que $T : E \mapsto -K^{-1}F, F \mapsto -EK, K \mapsto K^{-1}$ induit un automorphisme de l'algèbre U.

2 Soit V_m le U-module irréductible de plus haut poids $m\omega$, v_0 un vecteur de plus haut poids. Soit $T_{V_m} : V_m \to V_m$ l'application linéaire

$$T_{V_m}(F^{(j)}v_0) = (-1)^j q^{-j(m+1-j)} F^{(m-j)} v_0, 0 \leq j \leq m.$$

Montrer que $T_{V_m}(x.v) = T(x).T_{V_m}(v)$, $\forall x \in U, v \in V_m$.

3 Soient V, W deux U-modules intégrables. Montrer que l'application

$$L(v\otimes w) = \sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}(q-q^{-1})^n [n]! F^{(n)}v \otimes E^{(n)}w, \text{où } v\in V, w \in W,$$

est un isomorphisme de U-modules $L : V\otimes W \to V\bar{\otimes} W$. (Indication : d'inverse $L^{-1}(v\otimes w) = \sum_n (-1)^n q^{-n(n-1)/2}(q-q^{-1})^n [n]! F^{(n)}v \otimes E^{(n)}w$.)

4 Montrer que $(T_V \otimes T_W)T^{-1}_{V\otimes W}$ nous donne aussi un isomorphisme de U-modules $V\otimes W \to V\bar{\otimes} W$, et vérifier que $L = (T_V\otimes T_W)T^{-1}_{V\otimes W}$ dans l'exemple $\dim(V) = 2$.

5 Vérifier que $J : E \mapsto KE, F \mapsto FK^{-1}, K \mapsto K$ induit un automorphisme de l'algèbre U.

6 Soit $J_V : V \to V$ l'application linéaire $v \mapsto q^{(\mathrm{wt}(v),\mathrm{wt}(v))/2 + (\mathrm{wt}(v),\omega)}v$. Montrer que $J_V(x.v) = J(x).J_V(v)$, $\forall x \in U, v \in V$.

7 Soient V, W deux U-modules intégrables. Montrer que l'application

$$A(v\otimes w) = q^{-(\mathrm{wt}(v),\mathrm{wt}(w))} w\otimes v, \text{où } v \in V, w\in W,$$

est un isomorphisme de U-modules $A : V\otimes W \to W\bar{\otimes} V$.

8 Montrer que $A = \mathrm{Flip}\circ (J_V \otimes J_W)J^{-1}_{V\otimes W}$.

---

keyu.wang@imj-prg.fr

Référence : "Introduction to Quantum Groups", George Lusztig ; "Constructing the R-matrix from the quasi R-matrix", Peter Tingley