Théorie des représentations et théorie de Lie
TD 10

Limite classique

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody, q une indéterminée, $U_q(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppe quantique comme une $\mathbb{Q}(q)$-algèbre.

Soient $A_1 = \{f(q) \in \mathbb{Q}(q) | f \text{ régulière à } 1\}$ et U_{A_1} la sous A_1-algèbre de $U_q(\mathfrak{g})$ engendrée par e_i, f_i, K_h et $\frac{K_h - 1}{q-1}$ ($i \in I$, $h \in P^\vee$). Soient $U_{A_1}^-, U_{A_1}^0, U_{A_1}^+$ les sous A_1-algèbres de U_{A_1} engendrées par $\{f_i\}$, $\{K_h, \frac{K_h-1}{q-1}\}$ et $\{e_i\}$ respectivement.

1 Montrer que les éléments $(K_h, n)_q := \frac{K_h q^n - 1}{q-1}$ ($h \in P^\vee$, $n \in \mathbb{Z}$) sont contenus dans U_{A_1}. Calculer les relations commutatives entre ses éléments et e_i, f_i.

2 En déduire qu'on a la décomposition triangulaire de U_{A_1} :

$$U_{A_1} \simeq U_{A_1}^- \otimes U_{A_1}^0 \otimes U_{A_1}^+.$$

3 Soit V un $U_q(\mathfrak{g})$-module de plus haut poids avec un vecteur de plus haut poids v_0. Soit V' le U_{A_1}-module $U_{A_1}.v_0$.

3.1 Montrer que $V' = \bigoplus V'_\mu$, où $V'_\mu = V_\mu \cap V'$, $\mu \in \mathfrak{h}^*$.

3.2 Montrer que $\mathrm{rk}_{A_1}(V'_\mu) = \dim_{\mathbb{Q}(q)}(V_\mu)$, $\forall \mu \in \mathfrak{h}^*$

4 Soit $I = \{f(q) \in A_1 | f(1) = 0\}$ l'idéal maximal de A_1. Considérer la $\mathbb{Q}$-algèbre U_{A_1}/IU_{A_1}. L'image des générateurs $e_i, f_i, \frac{K_h-1}{q-1}$ sous le quotient est notée par e_i, f_i, h. Montrer que l'application $U(\mathfrak{g}) \to U_{A_1}/IU_{A_1}$ en identifiant les notations e_i, f_i, h ci-dessus induit un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Q}$-algèbres.

5 Soit V' le U_{A_1}-module dans la question 3. Considérer le $\mathbb{Q}$-espace $V^1 = V'/IV'$. Montrer que $V^1 = \bigoplus V_\mu^1$ et $\dim_{\mathbb{Q}}(V_\mu^1) = \mathrm{rk}_{A_1}(V'_\mu)$, où $V_\mu^1 = V'_\mu / IV'_\mu$.

6 L'homomorphisme $U(\mathfrak{g}) \to U_{A_1}/IU_{A_1}$ dans la question 4 nous donne une structure de $U(\mathfrak{g})$-module sur V^1. Montrer que V^1 est un $U(\mathfrak{g})$-module de plus haut poids.

7 Soit $V(\lambda)$ le $U_q(\mathfrak{g})$-module intégrable de plus haut poids $\lambda \in P^+$. Montrer que le $U(\mathfrak{g})$-module associé $V(\lambda)^1$ est le $U(\mathfrak{g})$-module intégrable de plus haut poids λ. En conséquence, $\chi(V(\lambda)) = \chi(V(\lambda)^1)$ donné par la formule de Weyl-Kac.

8 En fait, l'homomorphisme $U(\mathfrak{g}) \to U_{A_1}/IU_{A_1}$ dans la question 4 est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

---

keyu.wang@imj-prg.fr

Référence : "Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases", Jin Hong, Seok-Jin Kang