Théorie des représentations et théorie de Lie
TD 9

Multiplicité de poids

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody. Soit $\mathfrak{g}_{(i)}$ la sous-algèbre $\mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}f_i \oplus \mathbb{C}\alpha_i^\vee$. Soit V un $\mathfrak{g}$-module intégrable.

1 Montrer que comme $\mathfrak{g}_{(i)}$-module, V se décompose en une somme directe des sous-$\mathfrak{g}_{(i)}$-modules de dimension finie.

2 En déduire que $\dim(V_\lambda) = \dim(V_{\lambda-\lambda(\alpha_i^\vee)\alpha_i})$, $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$. En conséquence, $\dim(V_\lambda) = \dim(V_{w(\lambda)})$, $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$, $w \in W$.

3 Montrer que la représentation adjointe sur $\mathfrak{g}$ est intégrable.

Caractère de modules de Verma

Soit $mult(\alpha)$ la multiplicité d'une racine α dans $\mathfrak{g}$. Soit $M(\lambda)$ le module de Verma de plus haut poids λ.

4 Montrer que $mult(\alpha_i) = 1$ pour les racines simples α_i, $i \in I$. En déduire que $mult(\alpha) = 1$ pour toutes les racines réelles $\alpha \in \Delta^{re}$.

5 Montrer que

$$\chi(M(\lambda)) = e^\lambda \prod_{\alpha\in\Delta_+} (1-e^{-\alpha})^{-mult(\alpha)} =: e^\lambda R^{-1}.$$

6 En particulier, si $\mathfrak{g}$ est de type fini, alors

$$\chi(M(\lambda)) = e^\lambda \prod_{\alpha\in\Delta_+} \frac{1}{1-e^{-\alpha}}.$$

7 Fixer un élément $\rho \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\rho(\alpha_i^\vee) = 1$, $\forall i \in I$. Le groupe de Weyl agit sur $\mathbb{Z}[[\mathfrak{h}^*]$ déterminé par $w(e^\lambda) = e^{w\lambda}$. Montrer que $w(e^\rho R) = (-1)^{l(w)} e^\rho R$.

8 Rappelons que l'opérateur de Casimir généralisé est défini par $\Omega = 2\rho^\vee + \sum_i h^i h_i + \sum_{\alpha\in\Delta_+}\sum_i f_{\alpha,i}e_{\alpha,i}$, où $\rho^\vee \in \mathfrak{h}$ tel que $(\rho^\vee, h) = \rho(h)$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$, h^i, h_i deux bases duales de $\mathfrak{h}$, $f_{\alpha,i}e_{\alpha,i}$ bases duales de $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ et $\mathfrak{g}_\alpha$. Montrer qu'il agit sur $M(\lambda)$ par une multiplication scalaire $(\lambda+\rho, \lambda+\rho) - (\rho,\rho)$.

---

keyu.wang@imj-prg.fr
Référence : "Infinite dimensional Lie algebras", Victor Kac