# Théorie des représentations et théorie de Lie
# TD 8

## Groupe de Weyl : affine $\mathfrak{sl}_2$

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Kac-Moody définie par la matrice de Cartan $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Fixer un élément $d \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha_0(d) = 1$ et $\alpha_1(d) = 0$. Soit $\Lambda_0 \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\Lambda_0(\alpha_0^\vee) = 1$, $\Lambda_0(\alpha_1^\vee) = 0$, et $\Lambda_0(d) = 0$.

**1** Décrire l'action du groupe de Weyl agissant sur $\mathfrak{h}^*$ sous la base $\{\alpha_0, \alpha_1, \Lambda_0\}$.

**2** Décrire le système de racines pour $\mathfrak{g}$.

**3** Rappelons que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à l'extension centrale d'algèbres de lacets $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ avec le crochet de Lie

$$[P \otimes x + \lambda c + \xi d, Q \otimes y + \mu c + \eta d] = PQ \otimes [x, y] + \xi t \frac{dQ}{dt} \otimes y - \eta t \frac{dP}{dt} \otimes x + \kappa(x, y) \mathrm{Res}(Q \frac{dP}{dt}) c,$$

pour $P, Q \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, $x, y \in \mathfrak{sl}_2$, $\lambda, \mu, \xi, \eta \in \mathbb{C}$.

Trouver les vecteurs de racines sous cette présentation.

**4** Montrer que le groupe Weyl est isomorphe à un produit semi-direct des sous-groupes $\langle s_1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ et $\langle s_0 s_1 \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

**5** Vérifier par la question 1 que le groupe de Weyl agit sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* = \mathbb{R}\alpha_0 \oplus \mathbb{R}\alpha_1 \oplus \mathbb{R}\Lambda_0$ et qu'il préserve l'hyperplan $\Lambda_0 + \mathbb{R}\alpha_0 \oplus \mathbb{R}\alpha_1$. Considérer son action induite sur $V = \Lambda_0 + (\mathbb{R}\alpha_0 \oplus \mathbb{R}\alpha_1)/\mathbb{R}\delta$, notée par $W_{af}$. Montrer que $W \simeq W_{af}$.

**6** Donner une description géométrique des sous-groupes $\mathbb{Z}_2$ et $\mathbb{Z}$ dans la question 4 agissant sur $V$.

---

keyu.wang@imj-prg.fr