Théorie des représentations et théorie de Lie
TD 7

Algèbres de Kac-Moody : deux réalisations

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de Cartan généralisée. Un triplet $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ est appelé une réalisation de A si : $\mathfrak{h}$ est un espace vectoriel, $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$,$\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \cdots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h}$ tels que $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j\rangle = a_{ij}$.

1 Soit $r = \mathrm{rang}(A)$. Si les deux ensembles Π et $\Pi^\vee$ sont respectivement linéairement indépendants, montrer que $\dim\mathfrak{h} \geq 2n - r$.

2 Soit $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ une réalisation de A telle que Π et $\Pi^\vee$ sont linéairement indépendants et que $\dim\mathfrak{h} = 2n - r$, et soit $\mathfrak{g}(A)$ l'algèbre de Kac-Moody associée.

Soit $(\mathfrak{h}', \Pi, \Pi^\vee)$ une autre réalisation de A telle que $\mathfrak{h}' = \oplus_{i=1}^n \mathbb{C}\alpha_i^\vee$, et soit $\mathfrak{g}'(A)$ l'algèbre définie par les mêmes relations que pour $\mathfrak{g}(A)$ en remplaçant $h \in \mathfrak{h}$ par $h \in \mathfrak{h}'$.

On voit $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ comme un sous-espace. Montrer que $\mathfrak{g}'(A)$ est isomorphe à l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}(A)$: $\mathfrak{g}'(A) = [\mathfrak{g}(A), \mathfrak{g}(A)]$, et que $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{g}'(A) + \mathfrak{h}$. De plus, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'(A) = \mathfrak{h}'$.

3 Décrire les algèbres $\mathfrak{g}(A)$ et $\mathfrak{g}'(A)$ en terme de générateurs et relations pour l'exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Quel est le centre de $\mathfrak{g}(A)$ et de $\mathfrak{g}'(A)$?

4 Soit $[d]$ une classe dans $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}'(A))/\mathrm{Inn}(\mathfrak{g}'(A))$. Montrer qu'il existe une dérivation $d \in [d]$ telle que

$$d(\mathfrak{h}') \subset \mathfrak{c},\ d(\mathfrak{g}'(A)_{\alpha'}) \subset \mathfrak{g}'(A)_{\alpha'},$$

où $\mathfrak{c}$ est le centre de $\mathfrak{g}'(A)$ et α' est une racine quelconque de $\mathfrak{g}'(A)$.

5 Considérer l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(A)/\mathfrak{c}$, où $\mathfrak{c}$ est le centre de $\mathfrak{g}(A)$. La questions 4 est aussi valable pour $\mathfrak{g}(A)/\mathfrak{c}$. Soit d une dérivation qui préserve les espaces radiciels, montrer que $d(\mathfrak{h}) = 0$, et déduire que $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}(A)/\mathfrak{c}) = \mathrm{Inn}(\mathfrak{g}(A)/\mathfrak{c})$.

6 Choisir un vecteur $v \in \mathfrak{h} \setminus \mathfrak{h}'$. Montrer que $ad(v) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}'(A)) \setminus \mathrm{Inn}(\mathfrak{g}'(A))$. Remarquons que $d(\mathfrak{h}') = 0$ et que $d(\mathfrak{g}(A)_\alpha) \subset \mathfrak{g}(A)_\alpha$ pour toutes les racines α de $\mathfrak{g}(A)$.

7 Réciproquement, toutes les dérivations dans $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}'(A)) \setminus \mathrm{Inn}(\mathfrak{g}'(A))$ telles que $d(\mathfrak{h}') = 0$ et que $d(\mathfrak{g}(A)_\alpha) \subset \mathfrak{g}(A)_\alpha$ pour toutes les racines α de $\mathfrak{g}(A)$ sont de la forme ci-dessus.

---

keyu.wang@imj-prg.fr
Référence : "Infinite dimensional Lie algebras", Victor Kac