

# Théorie des représentations et théorie de Lie

## TD 6

### Racines et Poids : $A_2$

Considérer  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ ,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  les matrices diagonales.

Soit  $L_i \in \mathfrak{h}^*$  tel que  $L_i(\text{diag}(a_1, a_2, a_3)) = a_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .

**1** Calculer le crochet  $[h, E_{i,j}]$  pour  $h \in \mathfrak{h}$  et  $i \neq j$ . Vérifier qu'on a la décomposition en sous-espaces radiciels

$$\mathfrak{sl}_3 = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha, \Phi = \{L_1 - L_2, L_2 - L_3, L_3 - L_1, L_2 - L_1, L_3 - L_2, L_1 - L_3\}.$$

**2** On rappelle dans le TD 2 que les changements de bases de  $\mathfrak{sl}_3$  qui préservent  $\mathfrak{h}$  peuvent être réduits à  $\{g = (a_{i,j}) | a_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}, \sigma \in \mathfrak{S}_3\}$ . Calculer les actions de ces changements de base sur les sous-espaces  $\mathfrak{g}_\alpha$ , et l'action induite de  $\mathfrak{S}_3$  sur  $\Phi$ .

**3** Considérer l'automorphisme  $X \mapsto -X^T$  de  $\mathfrak{sl}_3$ . Montrer que cet automorphisme est différent des changements de bases ci-dessus. Quelle est son action induite sur  $\Phi$ ?

**4** En général, soient  $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ ,  $W = \bigoplus_\mu W_\mu$  la décomposition en espaces de poids des représentations. Quelle est la décomposition en espaces de poids de  $V \otimes W$ ,  $S^2V$ ,  $\Lambda^2V$ ,  $V^*$ ?

**5** Dans le cas  $V = \mathbb{C}^3$  la représentation standard de  $\mathfrak{sl}_3$ , calculer les poids et leur multiplicité de  $V$ ,  $V^*$ ,  $V \otimes V^*$ ,  $V \otimes V$ ,  $S^2V$  et  $\Lambda^2V$ .

**6** On a trois copies de sous-algèbres de  $\mathfrak{sl}_3$  isomorphes à  $\mathfrak{sl}_2$  :  $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathbb{C}h_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ . Étudier les restrictions des modules ci-dessus.

**7** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , prouver que  $S^n V$  est irréductible en considérant les poids apparaissant dans les modules de  $\mathfrak{sl}_2$  sous restriction.