Théorie des représentations et théorie de Lie
TD 5

Groupe de Lie SU_2

Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_2$ et $G = \mathrm{SU}_2 = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) | A^\dagger A = I, \det A = 1\}$.

1 Vérifier que la forme de Killing pour $\mathfrak{g}$ est $B(x,y) = 4\mathrm{Tr}(xy)$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$.

2 Considérons la représentation adjointe de G sur $\mathfrak{g}$. Montrer que

$$B(\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y) = B(X,Y), \forall g \in G, \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

3 La question précédente nous donne un homomorphisme de groupes $\mathrm{Ad} : G \to O(\mathfrak{g}, B)$, où $(\mathfrak{g}, B)$ est l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni du produit scalaire B. Calculer l'image et le noyau de cet homomorphisme.

4 En déduire que les algèbres de Lie réelles $\mathfrak{su}_2$ et $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ sont isomorphes.

5 Le groupe G agit sur $\mathbb{C}^2$ de façon canonique. Pour $m \in \mathbb{N}$, soit V_m l'espace vectoriel des fonctions polynomiales en x, y homogènes de degré m.

$$V_m = \{f(x,y) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \cdots + a_m y^m | a_i \in \mathbb{C} (0 \leq i \leq m)\}.$$

G agit sur V_m par $g.f(x,y) = f(g^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})$. Montrer que V_m est irréductible. Calculer la représentation associée de $\mathfrak{g}$ sur V_m.

6 On suppose que V_m sont toutes les représentations irréductibles de dimension finie de SU_2. Que peut-on dire des représentations de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$?

Plus sur la géométrie : Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_2$ et $G = \mathrm{SU}_2$. La forme bilinéaire $-B$ sur $\mathfrak{g} = T_e G$ induit une métrique riemannienne invariante à gauche sur G.

- A.1 Montrer que cette métrique riemannienne est bi-invariante.
- A.2 Montrer que la connexion de Levi-Civita est donnée par $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$ pour champs de vecteurs invariants à gauche $X, Y \in \mathfrak{g}$.
- A.3 Calculer $R(X,Y)Z$ pour champs de vecteurs invariants à gauche $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.
- A.4 Calculer $\mathrm{Ric}(X,X)$ pour tous les champs de vecteurs invariants à gauche $X \in \mathfrak{g}$. Remarquons que cela vérifie le fait que SU_2 est compacte par le théorème de Bonnet-Myers.

On rappelle les notions géométriques : pour tous champs de vecteurs X, Y, Z, on a la formule de Koszul : $2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X(\langle Y, Z\rangle) + Y(\langle Z, X\rangle) - Z(\langle X, Y\rangle) - \langle Y, [X,Z]\rangle - \langle Z, [Y,X]\rangle + \langle X, [Z,Y]\rangle$.

La courbure de ∇ est définie par $R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$.

Le tenseur de Ricci est définie par $\mathrm{Ric}(Y,Z) = \mathrm{Tr}(X \mapsto R(X,Y)Z)$.

keyu.wang@imj-prg.fr