Théorie des représentations et théorie de Lie
TD 4

Représentations de $\mathfrak{sl}_2$

Rappelons que toutes les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$ sont notées par V_n, $n \in \mathbb{N}$, et que $\dim(V_n) = n + 1$. Rappelons aussi que toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$ est complètement réductible.

Soit $h = \mathrm{diag}(1, -1) \in \mathfrak{sl}_2$.

1 Soit $V = V_1$ la représentation standard. Considérer la représentation tensorielle $V^{\otimes n}$, $n \geq 2$. Sa partie symétrique est notée par $S^n V$. Calculer l'action de $\mathfrak{sl}_2$ sur $S^n V$, vérifier que c'est une représentation de $\mathfrak{sl}_2$ et que $S^n V \simeq V_n$.

2 Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Soient $v \in S^n V, w \in S^m V$ deux vecteurs propres de h. Montrer que dans la représentation $S^n V \otimes S^m V$, $v \otimes w$ est aussi un vecteur propre de h. Calculer toutes les valeurs propres de h sur $S^n V \otimes S^m V$ et ses multiplicités.

3 Décomposer $S^n V \otimes S^m V$ en représentations irréductibles.

4 Pour $n = 2, 3, 4, 5$, décomposer $V^{\otimes n}$ en représentations irréductibles.

5 Le groupe $\mathfrak{S}_2$ agit sur $V \otimes V$ par $\sigma.(v_1 \otimes v_2) = v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)}$. Vérifier que cette action et l'action de $\mathfrak{sl}_2$ commutent. Soient $S^2 V = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} + (12))$ et $\Lambda^2 V = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - (12))$. En déduire que $S^2 V$ et $\Lambda^2 V$ sont des représentations de $\mathfrak{sl}_2$.

6 L'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $V^{\otimes 3}$ comme ci-dessus. Vérifier que cette action et l'action de $\mathfrak{sl}_2$ commutent. Soit $\Lambda^3 V = \mathrm{Im}(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma)$. Montrer que $\Lambda^3 V = 0$. Considérer le symétrisateur partiel $c = \mathrm{Id} + (12) - (13) - (132) \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ et étudier son image agissant sur $V^{\otimes 3}$.

keyu.wang@imj-prg.fr