Théorie des représentations et théorie de Lie
TD 3

Algèbres de Lie classiques : Type B

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Soit $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) = \{A \in M_{(2n+1)\times(2n+1)}(\mathbb{C}) | A^T + A = 0\}$.

1 Vérifier que $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ muni du crochet $[A, B] = AB - BA, \forall A, B \in \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie complexe avec une base $\{E_{i,j} - E_{j,i}\}_{1 \leq i < j \leq 2n+1}$.

2 Montrer que $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ comme algèbres de Lie.

3 Montrer que l'espace $\mathfrak{h}$ engendré par $\{E_{i,n+i} - E_{n+i,i}\}_{2 \leq i \leq n+1}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$. Prouver que c'est une sous-algèbre de Lie abélienne maximale.

4 Soit V un espace vectoriel complexe de dimension $2n+1$ muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée $\langle , \rangle$. Soit

$$\mathfrak{so}(V) = \{f : V \to V \text{ linéaire} | \langle f(v), w \rangle = -\langle v, f(w) \rangle\}.$$

Alors $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ est une réalisation de $\mathfrak{so}(V)$ en choisissant une base de V sous laquelle la forme bilinéaire est canonique. Trouver une autre base sous laquelle l'espace $\mathfrak{h}$ consiste en matrices diagonales.

5 Trouver tous les changements de base qui préservent $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et qui en plus préservent $\mathfrak{h}$.

Algèbres de Lie classiques : Type C

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Soit $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \{A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{C}) | A^T J + JA = 0\}$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

1 Vérifier que $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ muni du crochet $[A, B] = AB - BA$, $\forall A, B \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie complexe avec une base

$$\{E_{i,j} - E_{n+j,n+i}\}_{1 \leq i,j \leq n} \sqcup \{E_{i,n+j} + E_{j,n+i}\}_{1 \leq i \leq j \leq n} \sqcup \{E_{n+i,j} + E_{n+j,i}\}_{1 \leq i \leq j \leq n}.$$

2 Montrer que $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}_5(\mathbb{C})$.

3 Montrer que l'espace $\mathfrak{h}$ engendré par $\{E_{i,i} - E_{n+i,n+i}\}_{2 \leq i \leq n+1}$ est une sous-algèbre de Lie abélienne maximale de $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$.

4 Soit V un espace vectoriel complexe de dimension $2n$ muni d'une forme bilinéaire anti-symétrique non-dégénérée $\langle , \rangle$. Étudier des propriétés similaires à celles du type B dans la question 5.

keyu.wang@imj-prg.fr

Algèbres de Lie classiques : Type D

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Soit $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) = \{A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{C}) | A^T + A = 0\}$.

1 Vérifier que $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ muni du crochet $[A, B] = AB - BA$, $\forall A, B \in \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie complexe avec une base $\{E_{i,j} - E_{j,i}\}_{1\leq i<j\leq 2n}$.

2 Montrer que $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ comme algèbres de Lie. En particulier, $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C})$ n'est pas simple.

3 Montrer que $\mathfrak{so}_6(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$.

4 Montrer que l'espace $\mathfrak{h}$ engendré par $\{E_{i,n+i} - E_{n+i,i}\}_{1\leq i\leq n}$ est une sous-algèbre de Lie abélienne maximale de $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$.

5 Étudier des propriétés similaires à celles du type B dans questions 4 et 5.