Théorie des représentations et théorie de Lie
TD 2

Algèbres de Lie classiques : Type A

1 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Considérer l'ensemble $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) | \mathrm{tr}(A) = 0\}$ muni du crochet $[A, B] = AB - BA$, $\forall A, B \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Vérifier que c'est une algèbre de Lie complexe. Quelle est sa dimension ?

2 Montrer que les matrices $\{E_{i,j}\}_{1\leq i\neq j\leq n} \sqcup \{E_{i,i} - E_{i+1,i+1}\}_{1\leq i\leq n-1}$ forment une base de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Calculer les crochets entre ses éléments.

3.1 Soit I un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $E_{i,j} \in I$ pour certains $i \neq j$. Montrer que $I = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

3.2 Montrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est simple.
(Indication : appliquer le crochet avec $E_{i,j}$.)

4 Montrer que l'espace $\mathfrak{h}$ engendré par $\{E_{i,i} - E_{i+1,i+1}\}_{1\leq i\leq n-1}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Prouver que c'est une sous-algèbre de Lie abélienne maximale.

5 Considérer l'ensemble $\mathfrak{su}_n = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) | \mathrm{tr}(A) = 0, A^\dagger = -A\}$ muni du crochet $[A, B] = AB - BA$, $\forall A, B \in \mathfrak{su}_n$. Vérifier que c'est une algèbre de Lie réelle. Montrer que $\mathfrak{su}_n \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} \simeq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

6 Soit $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre de Lie réelle en remplacent le corps $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ dans la question 1. Alors on a $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} \simeq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathfrak{su}_n$ et $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ ne sont pas isomorphes comme algèbres de Lie réelles.

7 Soit V un espace vectoriel complexe de dimension n. Soit $\mathfrak{sl}(V) = \{f : V \to V \text{ linéaire} | \mathrm{tr}(f) = 0\}$. Alors $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est une réalisation de $\mathfrak{sl}(V)$ en choisissant une base de V. Le changement de base induit une action de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Trouver tous les changements de base qui envoient toutes les matrices diagonales aux matrices diagonales.

keyu.wang@imj-prg.fr