

Théorie des représentations et théorie de Lie

TD 1

Exercice 1

Soit $G = \mathfrak{S}_3$.

1 Dessiner la table de caractères pour toutes les trois représentations irréductibles de G .

(Indication : considérer la représentation de signature.)

2 Considérer la représentation de G ci-dessous : Soit V l'espace vectoriel complexe de dimension 6 avec une base $\{a\}_{a \in G}$, l'action linéaire du groupe G sur V est déterminée par son action sur la base : $g.a = gag^{-1}$.

Calculer le caractère de cette représentation. Décomposez-le en combinaison linéaire des caractères des représentations irréductibles dans la question 1.

Exercice 2

Soient $G = \mathfrak{S}_3$ et $H = \mathfrak{S}_4$.

1 Trouver trois représentations irréductibles de H comme dans l'exercice 1. Calculer leurs caractères.

2 Calculer le caractère de la représentation tensorielle des deux représentations irréductibles non-triviales dans la question 1.

Démontrer que cette représentation tensorielle est irréductible.

3 Dessiner la table de caractères pour toutes les cinq représentations irréductibles de H .

4 Le groupe G est un sous-groupe de H de façon canonique. Décomposer la restriction des représentations simples de H à G .

5 Montrer que le groupe $\{Id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ est un sous-groupe distingué dans H , et son groupe quotient est isomorphe à G . Trouver la représentation induite des représentations simples de G à H .

6 Trouver une réalisation géométrique de toute représentation simple de G et de H .