

Autour du modèle de Potts

Jérémie Bouttier

Cours MPRI 2.10, 10 janvier 2025

Propriétés générales

On se place sur un graphe connexe fini $G = (V, E)$. La *fonction de partition du modèle de Potts à q états* sur G (en champ magnétique nul) est définie par

$$Z_G(q, \beta) := \sum_{\eta \in \{1, \dots, q\}^V} e^{\beta \sum_{i \sim j} \delta_{\eta_i, \eta_j}} \quad (1)$$

où la notation $\sum_{i \sim j}$ veut dire qu'on somme sur toutes les arêtes de G , i et j désignant leurs extrémités.

Questions

1. Montrer que $Z_G(q, \beta)$ peut se réécrire sous la forme

$$Z_G(q, \beta) = \sum_{\omega \in \{0, 1\}^E} q^{C(\omega)} v^{|\omega|} \quad (2)$$

où $C(\omega)$ est le nombre de composantes connexes du graphe¹ ω , $|\omega| = \sum_{e \in E} \omega_e$ est son nombre d'arêtes, et

$$v := e^\beta - 1. \quad (3)$$

NB : ceci amène à définir le modèle de la *FK-percolation* dans lequel un graphe $\omega \in \{0, 1\}^E$ apparaît avec probabilité $q^{C(\omega)} v^{|\omega|} / Z_G(q, \beta)$.

2. Établir les relations de *contraction-suppression*, c'est-à-dire montrer que, si e est une arête de G (satisfaisant éventuellement certaines hypothèses), alors Z_G s'exprime en fonction de $Z_{G/e}$ et $Z_{G \setminus e}$, où G/e et $G \setminus e$ désignent respectivement le graphe obtenu en contractant ou en supprimant l'arête G . [On peut s'aider de la question suivante!]
3. En déduire une relation entre $Z_G(q, \beta)$ et le *polynôme de Tutte* $T_G(x, y)$, dont on rappelle qu'il est défini de façon inductive de la façon suivante :
 - si G n'a pas d'arêtes alors $T_G(x, y) = 1$,
 - si e est un isthme de G alors $T_G(x, y) = x T_{G/e}(x, y)$,
 - si e est une boucle de G alors $T_G(x, y) = y T_{G \setminus e}(x, y)$,
 - si e est une arête de G qui n'est ni un isthme ni une boucle, alors $T_G(x, y) = T_{G/e}(x, y) + T_{G \setminus e}(x, y)$.
4. Montrer que, en prenant des limites $q \rightarrow 0$ appropriées, Z_G donne le nombre de forêts couvrantes, de graphes connexes couvrants, ou d'arbres couvrants de G .

1. À $\omega \in \{0, 1\}^E$ on peut associer bijectivement le sous-graphe couvrant de (V, E) formé par les arêtes e telles que $\omega_e = 1$, qu'on note encore ω par abus.

Dualité du modèle de Potts sur les graphes plans

On se place à présent sur un graphe *plan*, i.e. dessiné dans le plan sans croisement d'arêtes. On note F l'ensemble des *faces* (composantes connexes du complémentaire du graphe dans le plan). Pour un graphe plan connexe, on a la relation d'Euler :

$$|V| - |E| + |F| = 2 \quad (4)$$

(vérifier cela sur le graphe de la figure (a), en ignorant pour l'instant les pointillés, et en n'oubliant pas de compter la face externe).

À tout graphe connexe plan on peut associer son graphe *dual* $G^* = (V^*, E^*)$, tel que V^* est en bijection avec F et E^* est en bijection avec E . À une configuration $\omega \in \{0, 1\}^E$, on associe la configuration duale ω^* définie par $\omega_{e^*}^* = 1 - \omega_e$ pour tout $e \in E$, e^* étant l'arête duale. Cf figure (b), où on représente simultanément le graphe muni d'une configuration de la figure (a) et leurs duaux², les arêtes ouvertes en trait plein et les arêtes fermées en pointillés. On considère $Z_{G^*}(q, \beta)$ la fonction de partition du modèle de Potts sur G^* , notre but est de trouver une relation fonctionnelle entre $Z_G(q, \beta)$ et $Z_{G^*}(q, \beta)$.

Équivalence avec un modèle de boucles On peut associer à (G, ω) une configuration de boucles dessinées sur un certain graphe. Les étapes successives sont représentées sur la figure :

- (a) On part d'un graphe G muni d'une configuration ω (rouge).
- (b) On superpose leurs duaux G^* et ω^* (vert).
- (c) Dans chaque face du graphe superposé, on trace la diagonale (bleue) reliant un sommet de G (rouge) à un sommet de G^* (vert).
- (d) On efface les arêtes fermées de G et de G^* . Chaque face a 3 côtés (le graphe est une *triangulation*), deux bleus et un rouge ou vert.
- (e) On dessine des boucles (magenta) traversant les faces et les arêtes bleues de la triangulation (du point de vue des graphes, ces boucles "vivent" sur le dual de la triangulation).
- (f) On efface les arêtes rouges et vertes.

Questions

1. Que dire du graphe bleu de la figure (f) ? Dépend-il de ω ? Donner une règle locale permettant de tracer une configuration de boucles admissible.
2. La transformation est-elle bijective ? Qu'obtient-on en partant de (G^*, ω^*) ?
3. Montrer le nombre de boucles L est donné par :

$$L = 2C(\omega) + |\omega| - |V|. \quad (5)$$

(Indication : écrire la relation d'Euler pour chaque composante connexe de ω .)

4. Réexprimer le poids $q^{C(\omega)} v^{|\omega|}$ dans le modèle de boucles.
5. On considère à présent la FK-percolation sur G^* , où une configuration ω^* reçoit un poids $q^{C(\omega^*)} (v^*)^{|\omega^*|}$. Montrer que pour un certain choix de v^* , ce poids est proportionnel à $q^{C(\omega)} v^{|\omega|}$ (avec une constante de proportionnalité indépendante de ω). En déduire une relation entre $Z_G(q, \beta)$ et $Z_{G^*}(q, \beta^*)$ en précisant la relation entre β et β^* . Donner également la relation entre p et $p^* = 1 - e^{-\beta^*}$, les "porosités" de la FK-percolation.

2. On pourra observer qu'ici le graphe dual n'est pas *simple*, car il possède une arête dont les deux extrémités sont confondues, et une paire d'arêtes doubles, ayant les mêmes deux extrémités. Ce détail peut être ignoré sans problème, on aurait également pu prendre G non-simple (dans la somme $i \sim j$ de (1), les arêtes doubles comptent deux fois, etc).

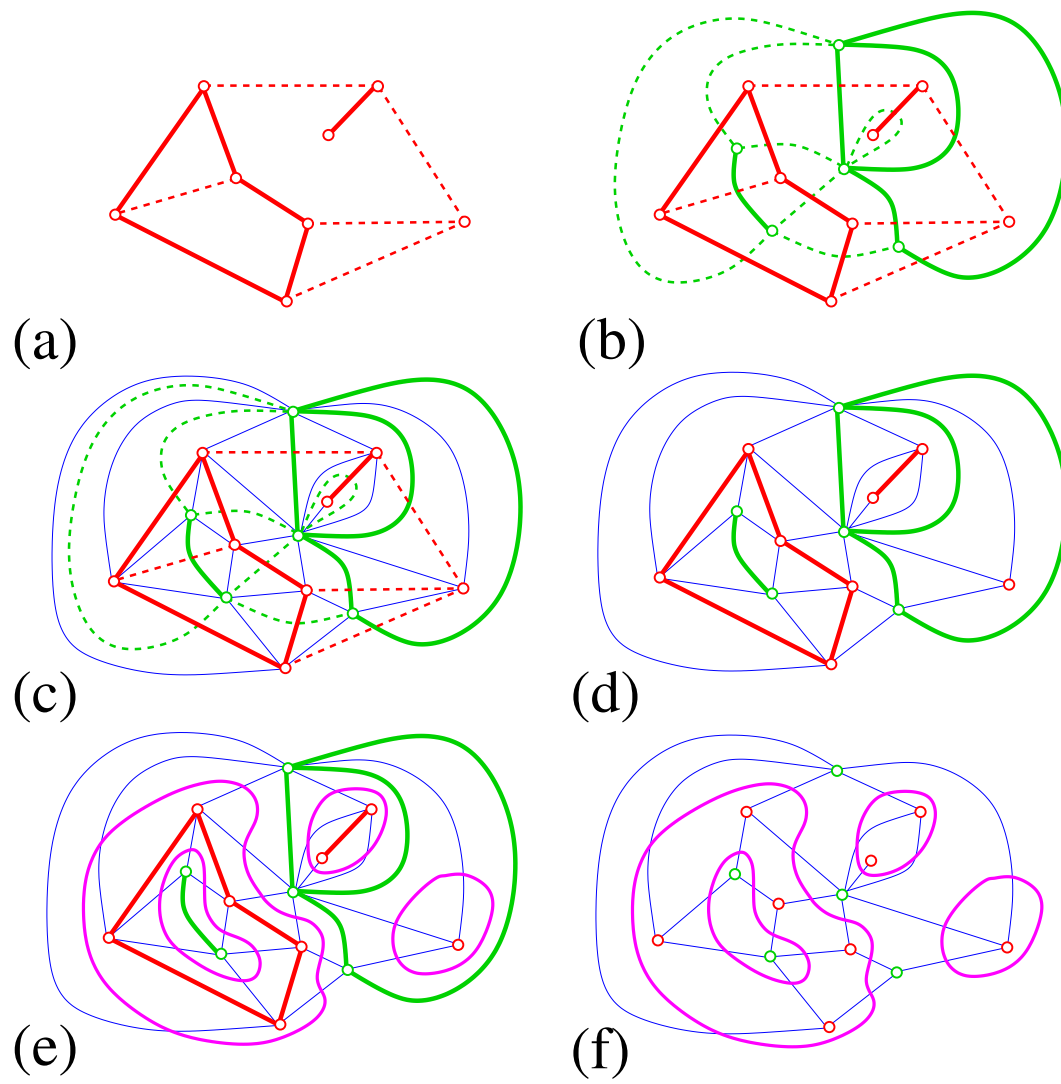


FIGURE 1 – Transformation de la FK-percolation en un modèle de boucles. Il est conseillé de visualiser cette figure en couleurs.

6. (Facultatif) Trouver le hamiltonien d'un modèle de spins à symétrie $O(n)$ dont la fonction de partition coïncide avec celle du modèle de boucles. Quelle est la relation entre n et q ? (Indication : les spins vivent sur les arêtes du graphe bleu.)
7. On suppose à présent que G est une "boîte" finie du réseau carré ($V = \mathbb{Z}^2 \cap [-n, n]^2$). On fait l'hypothèse que lorsque $n \rightarrow \infty$, la densité d'énergie libre thermodynamique $f(\beta) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta|V|} \ln Z_G(q, \beta)$ développe une unique singularité en une température critique β_c . Donner la valeur de β_c , et de p_c pour la FK-percolation. Qu'obtient-on dans le cas $q = 1$? $q = 2$?