Cône de type de graphes et d'édifices

Germain POULLOT

29 octobre 2020

Cône de type des édifices

1. Retour sur le précédent exposé

Cône de type des édifices

1. Retour sur le précédent exposé
2. Éventail normal et idées de réalisation(s)

Cône de type des édifices

Cône de type des édifices

Cône de type des édifices

Cône de type des édifices

1. Retour sur le précédent exposé
2. Éventail normal et idées de réalisation(s)
   - Introduction à la réalisation par l'éventail normal
   - Construction des g-vecteurs
   - Discussion sur les d-vecteurs
3. Cône de type

Cône de type des édifices

Cône de type des édifices

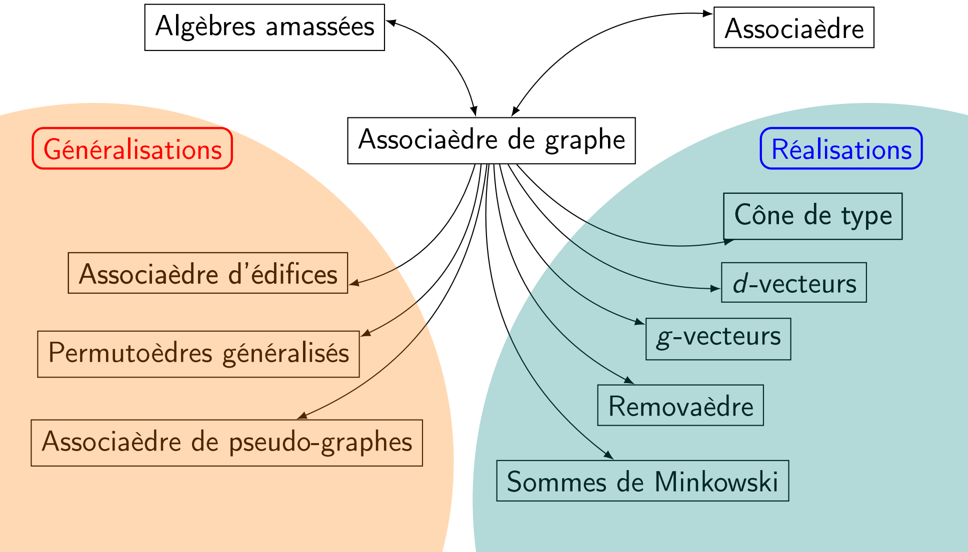
Cône de type des édifices

1. Retour sur le précédent exposé
2. Éventail normal et idées de réalisation(s)
   - Introduction à la réalisation par l'éventail normal
   - Construction des g-vecteurs
   - Discussion sur les d-vecteurs
3. Cône de type
   - Algorithme pour un éventail simplicial
   - Échangeabilité dans les graphes et les édifices
   - Relation d'échange dans les graphes et les édifices

Cône de type des édifices

Séminaire DGeCo

Quelle(s) généralisation(s) ensuite ?



Édifices

Définition (Édifices)

Un *édifice*[a] *sur S* est un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de S respectant :

- Singletons et connexion : $\forall s \in S,\ \{s\} \in \mathcal{B}$ et $S \in \mathcal{B}$
- Stabilité par réunion : $\forall A, B \in \mathcal{B},\ A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}$

On appellera *blocs* les éléments d'un édifice et *blocs inséparables* les éléments nécessaires pour l'engendrer par réunions non-disjointes.

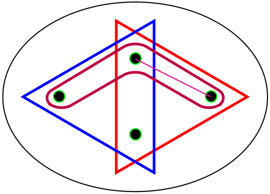
a. *building set* en anglais

Ce POSET correspond au POSET des (hyper)tubes d'un hypergraphe.

Cf Feichtner 2005, Postnikov 2009, Manneville & Pilaud 2015,...

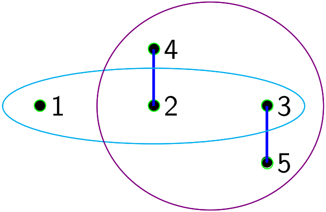
Exemple d'édifice

$S = \{1, 2, 3, 4\}$



$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup$
$\{\{1, 2\}; \{1, 2, 3\}; \{1, 3, 4\};$
$\{1, 2, 4\}\} \cup \{S\}$

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup$
$\{\{2, 4\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 3\},$
$\{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}\} \cup$
$\{S\}$

Ensembles nidifiés (maximaux)

Définition (Ensemble nidifié)

Un *ensemble nidifié* $\mathcal{N}$ d'un édifice $\mathcal{B}$ est une partie de $\mathcal{B}$ telle que :

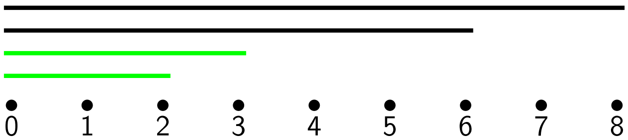
- Nidification : $\forall N_1, N_2 \in \mathcal{N},\ N_1 \subseteq N_2$ ou $N_2 \subseteq N_1$ ou $N_1 \cap N_2 = \emptyset$
- Non recouvrement :
  $\forall k \geq 2, \forall N_1, ..., N_k \in \mathcal{N},\ \forall i \neq j,\ N_i \cap N_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i=1}^{k} N_i \notin \mathcal{B}$.
- Connexion : $S \in \mathcal{N}$ *(hypothèse en discussion)*

Les ensembles nidifiés correspondent aux "tubages" d'un hypergraphe.
L'ensemble des ensembles nidifiés forme un complexe simplicial abstrait, appelé *complexe nidifié*.

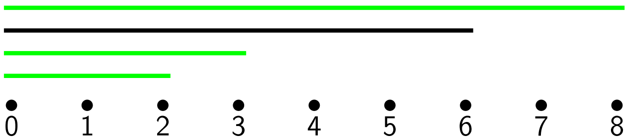
Exemple d'ensemble nidifiés

Exemple d'ensemble nidifiés

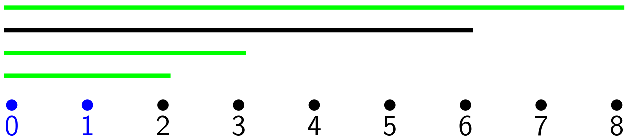
Exemple d'ensemble nidifiés



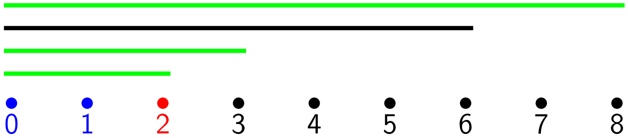
Exemple d'ensemble nidifiés



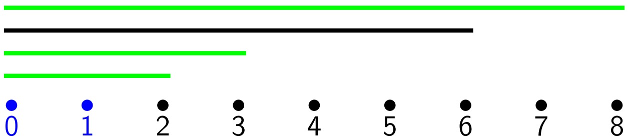
Exemple d'ensemble nidifiés



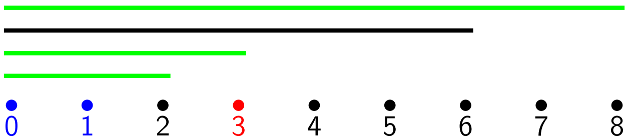
Exemple d'ensemble nidifiés



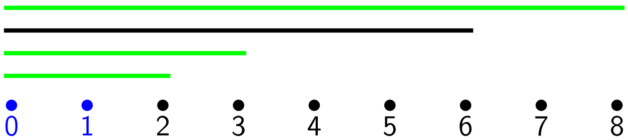
Exemple d'ensemble nidifiés



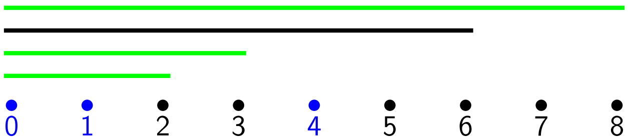
Exemple d'ensemble nidifiés



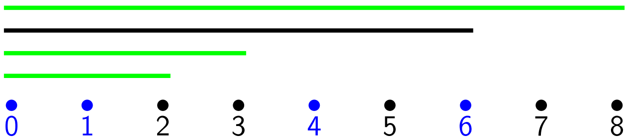
Exemple d'ensemble nidifiés



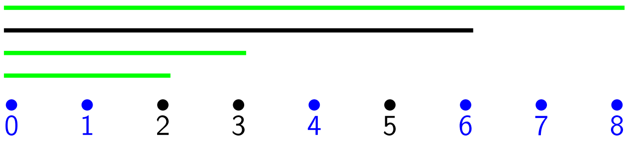
Exemple d'ensemble nidifiés



Exemple d'ensemble nidifiés



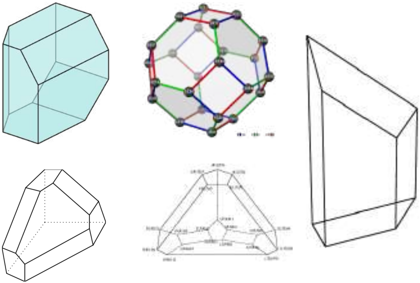
Exemple d'ensemble nidifiés



Associaèdres d'édifice

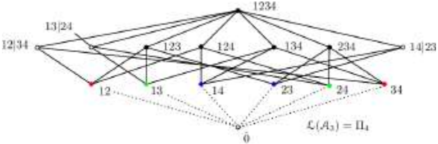
Associaèdres d'édifice

L'*associaèdre d'un édifice $\mathcal{B}$* est le polytope qui réalise son complexe nidifié.



On retrouve d'autres polytopes connus (Pitman-Stanley,...), et des liens algébriques profonds (compactification merveilleuse de De Concini-Procesi,...).

Cf Zelevinsky 2005, Feichtner 2005, Postnikov 2009,...

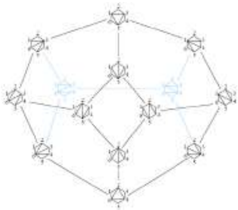


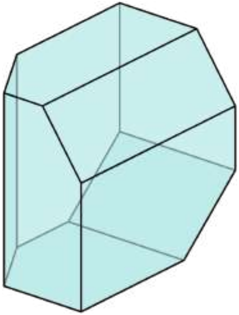
Séminaire DGeCo

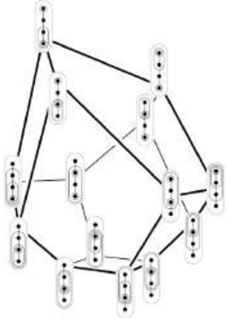
Séminaire DGeCo

Différentes réalisations des associaèdres

Il existe de multiples réalisations d'un même associaèdre (d'édifice).





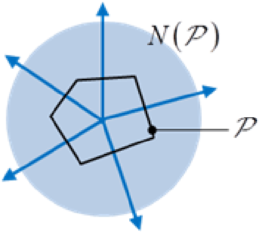


Éventail normal

Pour différencier ces associaèdres, on les classe par éventail normal.

Définition (Éventail normal)

L'*éventail normal* d'un polytope P est l'éventail des cônes (polyédraux) constitués par les normales extérieures aux faces de P.



Éventail normal

Éventail normal et treillis de face

Deux polytopes ayant le même éventail normal ont le même treillis de face.

Ainsi, deux questions se posent :

- Pour un associaèdre d'édifice, quels sont les éventails normaux possibles ?
- Pour un éventail normal fixé, comment trouver **tous** les polytopes admissibles ?

Éventail normal

Éventail normal et treillis de face

Deux polytopes ayant le même éventail normal ont le même treillis de face.

Ainsi, deux questions se posent :

- Pour un associaèdre d'édifice, comment construire des éventails normaux plausibles [1] ?
- Pour un éventail normal fixé, comment trouver **tous** les polytopes admissibles ?

1. i.e. des éventails dont on sait que si un polytope P lui est admissible, alors P est un associaèdre pour l'édifice.

Éventail normal

Éventail normal et treillis de face

Deux polytopes ayant le même éventail normal ont le même treillis de face.

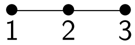
Ainsi, deux questions se posent :

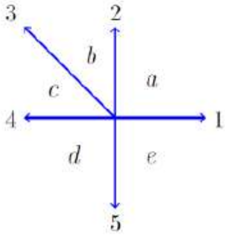
- Pour un associaèdre d'édifice, comment construire des éventails normaux plausibles[1] ?
- Pour un éventail normal fixé, comment trouver **tous** les polytopes admissibles ? *(Fait pour les graphes PPPP19)*

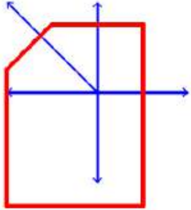
1. i.e. des éventails dont on sait que si un polytope P lui est admissible, alors P est un associaèdre pour l'édifice.

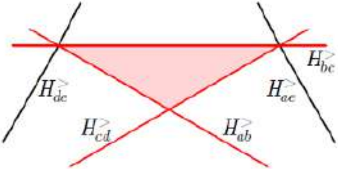
Exemple (chemin de longueur 2)

G :









Un éventail plausible

Une réalisation de l'éventail

"Toutes" les réalisations possibles

Séminaire DGeCo

Réalisation de Carr & Devadoss (rappel)

Réalisabilité de l'associaèdre de graphe

Pour un tubage maximal T, on définit $f_T : V(G) \to \mathbb{R}_+$ par :

- Si $\{v\} \in T$, alors : $f_T(v) = 0$
- Sinon, soit $t_v = \min\{t \in T; v \in t\}$: $\sum_{x \in t_v} f_T(x) = 3^{|t_v|-2}$

Alors Conv $\left\{(f_T(v))_{v \in V(G)} \ ; \ T \in \mathcal{T}_{max}\right\}$ est un associaèdre de G.

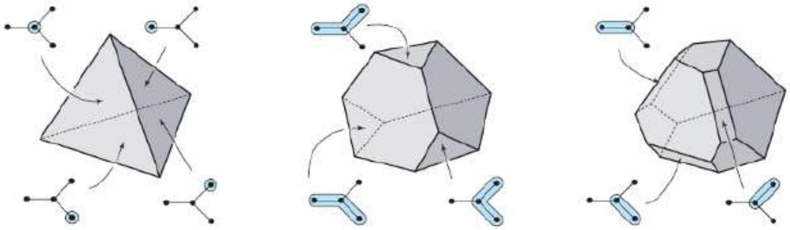
Réalisation de Carr & Devadoss (rappel)

Réalisabilité de l'associaèdre de graphe

Pour un tubage maximal T, on définit $f_T : V(G) \to \mathbb{R}_+$ par :

- Si $\{v\} \in T$, alors : $f_T(v) = 0$
- Sinon, soit $t_v = \min\{t \in T ; v \in t\}$: $\sum_{x \in t_v} f_T(x) = 3^{|t_v|-2}$

Alors Conv $\left\{(f_T(v))_{v \in V(G)} \; ; \; T \in \mathcal{T}_{max}\right\}$ est un associaèdre de G.



Réalisation de Carr & Devadoss (g-vecteurs)

Éventail normal pour la réalisation de Carr & Devadoss

Le vecteur normal à la face associée à t est $g(t) = \sum_{x \in t} e_x$.
L'éventail normal est formé des $\mathrm{Cone}\,\{g(t)\ ;\ t \in T\}$ pour les tubages T de G.

Réalisation de Carr & Devadoss (g-vecteurs)

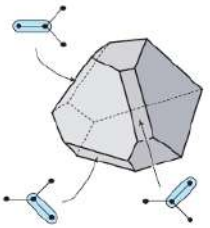
Éventail normal pour la réalisation de Carr & Devadoss

Le vecteur normal à la face associée à t est $g(t) = \sum_{x \in t} e_x$. L'éventail normal est formé des Cone$\{g(t)\ ;\ t \in T\}$ pour les tubages T de G.

Fonction de sommets

Rappel :

- $f_T(v) = 0$ si $\{v\} \in T$
- $\sum_{x \in t_v} f_T(x) = 3^{|t_v|-2}$



Définition des g-vecteurs

Pour n donné, on note $(e_i)_i$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition (g-vecteurs)

Soit un édifice $\mathcal{B}$ de support S de taille n.
Le *g-vecteur* d'un bloc $B \in \mathcal{B}$ est $g(B) = \sum_{i \in S} e_i$.

Définition des g-vecteurs

Pour n donné, on note $(e_i)_i$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition (g-vecteurs)

Soit un édifice $\mathcal{B}$ de support S de taille n.
Le *g-vecteur* d'un bloc $B \in \mathcal{B}$ est $g(B) = \sum_{i \in S} e_i$.

En réalité, il y a un problème de dimensions...
Pour le résoudre, on construit la projection orthogonale $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{H}$

avec $\mathbb{H} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^S \; ; \; \sum_{s \in S} x_s = 0\} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp}$.

Définition des g-vecteurs

Pour n donné, on note $(e_i)_i$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition (g-vecteurs)

Soit un édifice $\mathcal{B}$ de support S de taille n.
Le *g-vecteur* d'un bloc $B \in \mathcal{B}$ est $g(B) = \pi\left(\sum_{i \in S} e_i\right)$.

En réalité, il y a un problème de dimensions...
Pour le résoudre, on construit la projection orthogonale $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{H}$ avec $\mathbb{H} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^S \ ; \ \sum_{s \in S} x_s = 0\} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp}$.

Éventail des g-vecteurs

Définition (Éventail des g-vecteurs)

L'*éventail des g-vecteurs* est l'éventail $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ formé par les $\text{Cone}\{g(B)\ ;\ B \in \mathcal{N}\}$ pour $\mathcal{N}$ un ensemble nidifié de $\mathcal{B}$.
Il est complet, essentiel et **simplicial**.

Éventail des g-vecteurs

Définition (Éventail des g-vecteurs)

L'*éventail des g-vecteurs* est l'éventail $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ formé par les $\text{Cone}\{g(B)\ ;\ B \in \mathcal{N}\}$ pour $\mathcal{N}$ un ensemble nidifié de $\mathcal{B}$.
Il est complet, essentiel et **simplicial**.

Éventail normal pour la réalisation de Carr & Devadoss (reformulé)

La réalisation de Carr & Devadoss de l'associaèdre d'un graphe G a pour éventail normal l'éventail des g-vecteurs.

Éventail des g-vecteurs

Définition (Éventail des g-vecteurs)

L'*éventail des g-vecteurs* est l'éventail $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ formé par les $\mathrm{Cone}\{g(B)\ ;\ B \in \mathcal{N}\}$ pour $\mathcal{N}$ un ensemble nidifié de $\mathcal{B}$.
Il est complet, essentiel et **simplicial**.

Éventail normal pour la réalisation de Carr & Devadoss (reformulé)

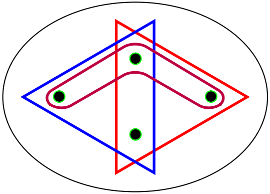
La réalisation de Carr & Devadoss de l'associaèdre d'un graphe G a pour éventail normal l'éventail des g-vecteurs.

Réalisation via les g-vecteurs (Carr & Devadoss, Postnikov)

Pour tout édifice $\mathcal{B}$, il existe un associaèdre de $\mathcal{B}$ dont l'éventail normal est l'éventail des g-vecteurs.

Projection stéréographique de l'éventail des g-vecteurs

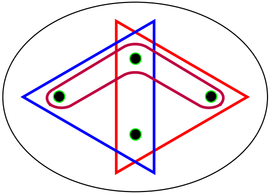
$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$



$$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup \{\{1,2,3\}; \{1,3,4\}; \{1,2,4\}\} \cup \{S\}$$

Projection stéréographique de l'éventail des g-vecteurs

$S = \{1, 2, 3, 4\}$

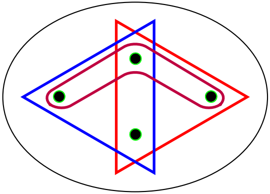


$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup$
$\{\{1, 2, 3\}; \{1, 3, 4\};$
$\{1, 2, 4\}\} \cup \{S\}$

10 ensembles nidifiés maximaux, tous de cardinal 3.

Projection stéréographique de l'éventail des g-vecteurs

$S = \{1, 2, 3, 4\}$



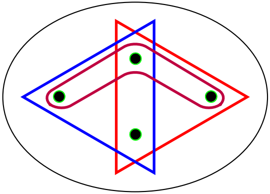
$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup \{\{1, 2, 3\}; \{1, 3, 4\}; \{1, 2, 4\}\} \cup \{S\}$

10 ensembles nidifiés maximaux, tous de cardinal 3.

On utilise une projection stéréographique pour visualiser : on intersecte $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} \subset \mathbb{R}^3$ avec $\mathbb{S}^2$ et on projette stéréographiquement sur $\mathbb{R}^2$.

Projection stéréographique de l'éventail des g-vecteurs

$S = \{1, 2, 3, 4\}$



$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup \{\{1, 2, 3\}; \{1, 3, 4\}; \{1, 2, 4\}\} \cup \{S\}$

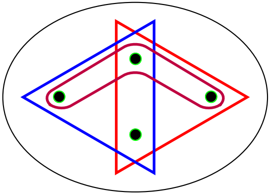
10 ensembles nidifiés maximaux, tous de cardinal 3.

On utilise une projection stéréographique pour visualiser : on intersecte $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} \subset \mathbb{R}^3$ avec $\mathbb{S}^2$ et on projette stéréographiquement sur $\mathbb{R}^2$.

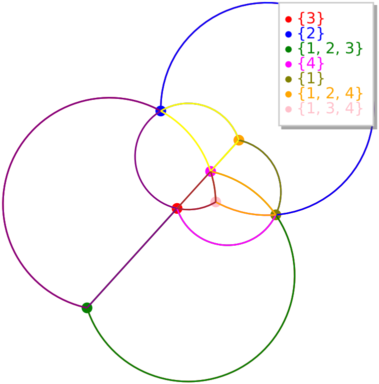
Le cône d'un ensemble nidifié maximal donnera une "chambre" du plan, les blocs donneront des points.

Projection stéréographique de l'éventail des g-vecteurs

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$



$$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup \{\{1, 2, 3\}; \{1, 3, 4\}; \{1, 2, 4\}\} \cup \{S\}$$



Séminaire DGeCo

Éventails des d-vecteurs

Mentionnons rapidement une autre famille d'éventails usuels associés aux graphes : les éventails de d-vecteurs pour un graphe G.

Éventails des d-vecteurs

Mentionnons rapidement une autre famille d'éventails usuels associés aux graphes : les éventails de d-vecteurs pour un graphe G.

On définit le degré de compatibilité entre tubes t et u :

$$[t||u] = \begin{cases} -1 & \text{si } t = u \\ |\text{voisins de } t \text{ dans } u \backslash t| & \text{si } t \subsetneq u \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Éventails des d-vecteurs

Mentionnons rapidement une autre famille d'éventails usuels associés aux graphes : les éventails de d-vecteurs pour un graphe G.

On définit le degré de compatibilité entre tubes t et u :

$$[t||u] = \begin{cases} -1 & \text{si } t = u \\ |\text{voisins de } t \text{ dans } u \backslash t| & \text{si } t \subsetneq u \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour un tubage maximal T_0, on définit le d-vecteur :

$$d_{T_0}(t) = ([t||u])_{u \in T_0}$$

Éventails des d-vecteurs

Mentionnons rapidement une autre famille d'éventails usuels associés aux graphes : les éventails de d-vecteurs pour un graphe G.

On définit le degré de compatibilité entre tubes t et u :

$$[t||u] = \begin{cases} -1 & \text{si } t = u \\ |\text{voisins de } t \text{ dans } u \backslash t| & \text{si } t \subsetneq u \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour un tubage maximal T_0, on définit le d-vecteur :

$$d_{T_0}(t) = ([t||u])_{u \in T_0}$$

Il est prouvé que ces éventails sont polytopaux pour les cycles et les chemins (*Manneville & Pilaud*). On peut les définir pour les édifices.

Séminaire DGeCo

Séminaire DGeCo

Cône de type

Définition (Cônes de type)

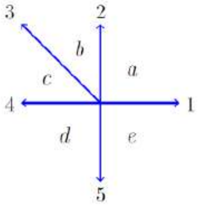
Soit un éventail (de cônes polyédraux) $\mathcal{F}$ et la matrice M dont les lignes sont les rayons de $\mathcal{F}$. Pour $\vec{h}$, on note $P_{\vec{h}} = \left\{\vec{x}\ ;\ M\vec{x} \leq \vec{h}\right\}$.

Le *cône de type de $\mathcal{F}$* est $\mathbb{TC}(\mathcal{F}) = \left\{\vec{h}\ ;\ P_{\vec{h}} \text{ a pour éventail } \mathcal{F}\right\}$.

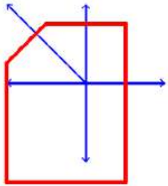
Cône de type

Définition (Cônes de type)

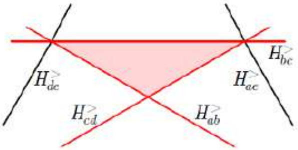
Soit un éventail (de cônes polyédraux) $\mathcal{F}$ et la matrice M dont les lignes sont les rayons de $\mathcal{F}$. Pour $\vec{h}$, on note $P_{\vec{h}} = \left\{ \vec{x} \ ; \ M\vec{x} \leq \vec{h} \right\}$.
Le *cône de type de $\mathcal{F}$* est $\mathbb{TC}(\mathcal{F}) = \left\{ \vec{h} \ ; \ P_{\vec{h}} \text{ a pour éventail } \mathcal{F} \right\}$.



Un éventail plausible



Une réalisation de l'éventail

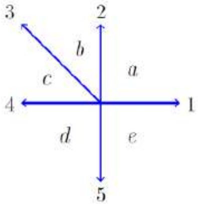


"Toutes" les réalisations possibles

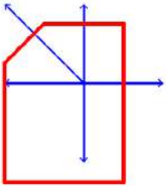
Cône de type

Définition (Cônes de type)

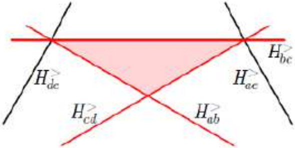
Soit un éventail (de cônes polyédraux) $\mathcal{F}$ et la matrice M dont les lignes sont les rayons de $\mathcal{F}$. Pour $\vec{h}$, on note $P_{\vec{h}} = \left\{ \vec{x} \ ; \ M\vec{x} \leq \vec{h} \right\}$.
Le *cône de type de $\mathcal{F}$* est $\mathbb{TC}(\mathcal{F}) = \left\{ \vec{h} \ ; \ P_{\vec{h}} \text{ a pour éventail } \mathcal{F} \right\}$.



Un éventail plausible



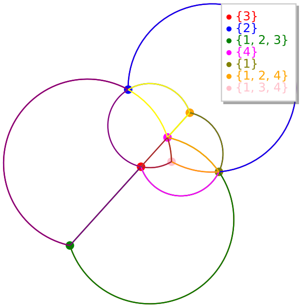
Une réalisation de l'éventail



Section du cône de type

Algorithme pour le cône de type

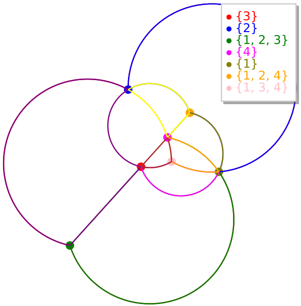
Méthode pour construire $\mathbb{TC}(\mathcal{F})$ pour $\mathcal{F}$ complet, essentiel et **simplicial** (McMullen, puis Chapoton, Fomin, Zelevinsky) :



Algorithme pour le cône de type

Méthode pour construire $\mathbb{TC}(\mathcal{F})$ pour $\mathcal{F}$ complet, essentiel et **simplicial** (McMullen, puis Chapoton, Fomin, Zelevinsky) :

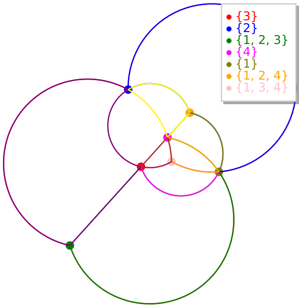
- C_1 et C_2 max adjacents



Algorithme pour le cône de type

Méthode pour construire $\mathbb{TC}(\mathcal{F})$ pour $\mathcal{F}$ complet, essentiel et **simplicial** (McMullen, puis Chapoton, Fomin, Zelevinsky) :

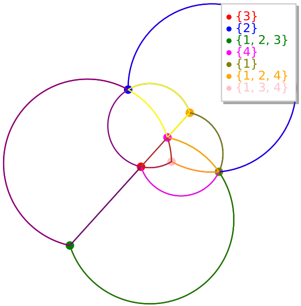
- C_1 et C_2 max adjacents
- Relation d'échange : $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \sum_{i=3}^{m} \alpha_i r_i = \vec{0}$ avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$



Algorithme pour le cône de type

Méthode pour construire $\mathbb{TC}(\mathcal{F})$ pour $\mathcal{F}$ complet, essentiel et **simplicial** (McMullen, puis Chapoton, Fomin, Zelevinsky) :

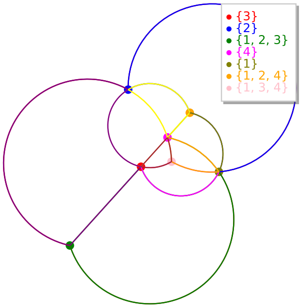
- C_1 et C_2 max adjacents
- Relation d'échange : $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \sum_{i=3}^{m} \alpha_i r_i = \vec{0}$ avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$
- $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}\ ;\ \vec{\alpha} \text{ rel. d'échange}\}$



Algorithme pour le cône de type

Méthode pour construire $\mathbb{TC}(\mathcal{F})$ pour $\mathcal{F}$ complet, essentiel et **simplicial** (McMullen, puis Chapoton, Fomin, Zelevinsky) :

- C_1 et C_2 max adjacents
- Relation d'échange : $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \sum_{i=3}^{m} \alpha_i r_i = \vec{0}$ avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$
- $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}\ ;\ \vec{\alpha} \text{ rel. d'échange}\}$

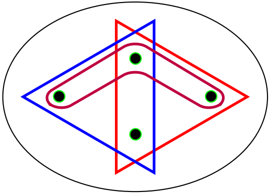


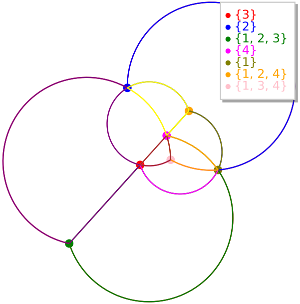
Caractérisation (Cône de type)

Le cône de type de $\mathcal{F}$ est : $\mathbb{TC}(\mathcal{F}) = \left\{\vec{h}\ ;\ \forall \vec{\alpha} \in \mathcal{A},\ \left\langle \vec{\alpha} \middle| \vec{h} \right\rangle > 0\right\}$

Cône de type d'un édifice pour l'éventail des g-vecteurs

L'objectif est de déterminer le cône de type d'un édifice pour l'éventail des g-vecteurs, i.e. $\mathbb{TC}(\mathcal{F}_\mathcal{B})$ où $\mathcal{F}_\mathcal{B}$ est l'éventail des g-vecteurs de $\mathcal{B}$. On le notera $\mathbb{TC}_g(\mathcal{B})$.
Cela donnera de nombreuses réalisations de l'associaèdre d'édifice.





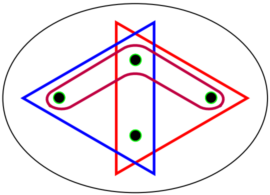
Séminaire DGeCo

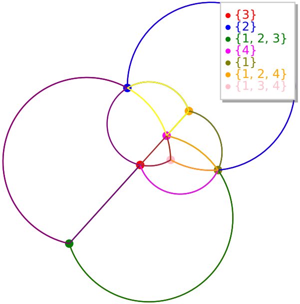
1. Retour sur le précédent exposé
2. Éventail normal et idées de réalisation(s)
   - Introduction à la réalisation par l'éventail normal
   - Construction des g-vecteurs
   - Discussion sur les d-vecteurs
3. Cône de type
   - Algorithme pour un éventail simplicial
   - Échangeabilité dans les graphes et les édifices
   - Relation d'échange dans les graphes et les édifices
4. Idée d'extrémalité

Échangeabilité

Définition (Échangeabilité)

Deux blocs $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ sont dits *échangeables* s'il existe pour eux deux ensembles nidifiés maximaux *adjacents*, i.e. $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ tels que $\mathcal{N}_1 \backslash \{B_1\} = \mathcal{N}_2 \backslash \{B_2\}$ avec $B_1 \in \mathcal{N}_1$ et $B_2 \in \mathcal{N}_2$.





Formulation transversale

Théorème (Formulation transversale)

Soient $A, B \in \mathcal{B}$. A et B sont échangeables ssi il existe un bloc P, ainsi que $a \in (A \backslash B)$ et $b \in (B \backslash A)$ tels que $A \subset P$ et $B \subset P$ et :

- Il n'y a pas de bloc ($\subseteq P$) entre A et $P \backslash (A \cup \{b\})$.
- Il n'y a pas de bloc ($\subseteq P$) entre B et $P \backslash (B \cup \{a\})$.

Formulation transversale

Théorème (Formulation transversale)

Soient $A, B \in \mathcal{B}$. A et B sont échangeables ssi il existe un bloc P, ainsi que $a \in (A \backslash B)$ et $b \in (B \backslash A)$ tels que $A \subset P$ et $B \subset P$ et :

- Il n'y a pas de bloc ($\subseteq P$) entre A et $P \backslash (A \cup \{b\})$.
- Il n'y a pas de bloc ($\subseteq P$) entre B et $P \backslash (B \cup \{a\})$.

P est le *bloc parent* de l'échange entre A et B.
(a, b) est l'*arête compressible* de l'échange entre A et B.

Formulation transversale

Théorème (Formulation transversale)

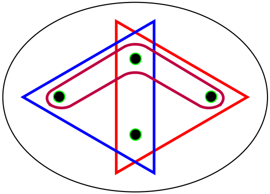
Soient $A, B \in \mathcal{B}$. A et B sont échangeables ssi il existe un bloc P, ainsi que $a \in (A \backslash B)$ et $b \in (B \backslash A)$ tels que $A \subset P$ et $B \subset P$ et :

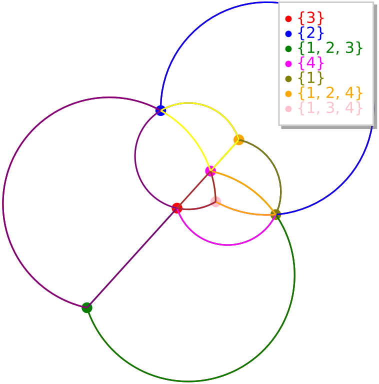
- Il n'y a pas de bloc inséparable ($\subseteq P$) entre A et $P \backslash (A \cup \{b\})$.
- Il n'y a pas de bloc inséparable ($\subseteq P$) entre B et $P \backslash (B \cup \{a\})$.

P est le *bloc parent* de l'échange entre A et B.
(a, b) est l'*arête compressible* de l'échange entre A et B.

Formulation transversale

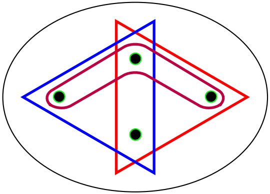
$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$



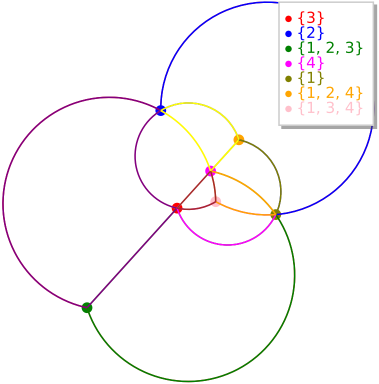


Formulation transversale

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$

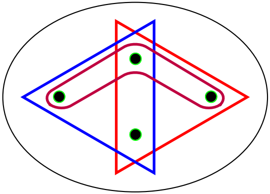


$\{2\}$ et $\{1, 3, 4\}$ échangeables.



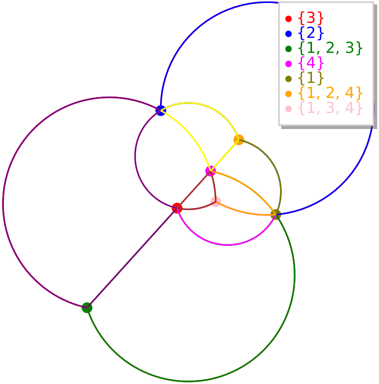
Formulation transversale

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$



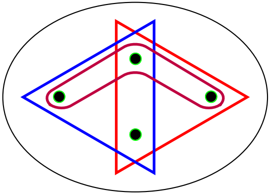
$\{2\}$ et $\{1, 3, 4\}$ échangeables.

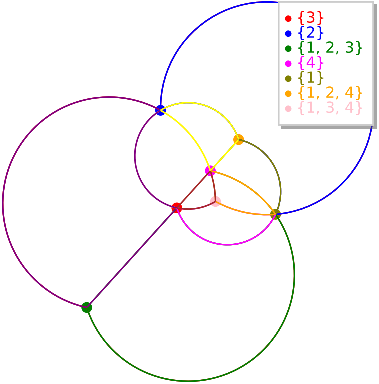
$\{3\}$ et $\{4\}$ échangeables.



Formulation transversale

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$





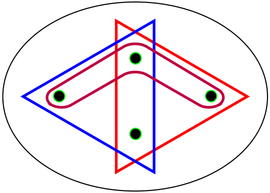
$\{2\}$ et $\{1, 3, 4\}$ échangeables.

$\{3\}$ et $\{4\}$ échangeables.

$\{2\}$ et $\{1, 2, 3\}$ non.

Formulation transversale

$$S = \{1,2,3,4\}$$



$\{2\}$ et $\{1,3,4\}$ échangeables.

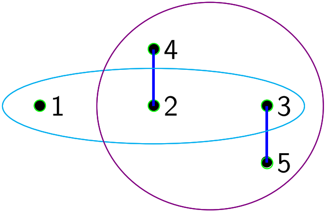
$\{3\}$ et $\{4\}$ échangeables.

$\{2\}$ et $\{1,2,3\}$ non.

A	B	P	(a,b)
$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2,3\}$	$(1,2)$
$\{1\}$	$\{3\}$		$(1,3)$
$\{2\}$	$\{3\}$		$(2,3)$
$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2,4\}$	$(1,2)$
$\{1\}$	$\{4\}$		$(1,4)$
$\{2\}$	$\{4\}$		$(2,4)$
$\{1\}$	$\{3\}$	$\{1,3,4\}$	$(1,3)$
$\{1\}$	$\{4\}$		$(1,4)$
$\{3\}$	$\{4\}$		$(3,4)$
$\{2\}$	$\{1,3,4\}$	S	$(2,1)$
$\{3\}$	$\{1,2,4\}$	S	$(3,1)$
$\{4\}$	$\{1,2,3\}$	S	$(4,1)$
$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	S	$(3,4)$
$\{1,2,3\}$	$\{1,3,4\}$	S	$(2,4)$
$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	S	$(2,3)$

Formulation transversale

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



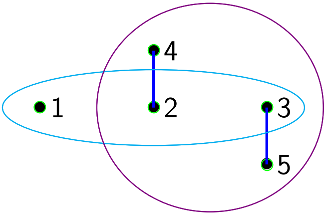
$$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup \{\{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}\} \cup \{S\}$$

<u>Exercice :</u> sont-ils échangeables ?

Attention au parent !

Formulation transversale

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



$$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup$$
$$\{\{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\},$$
$$\{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}\}$$
$$\cup\{S\}$$

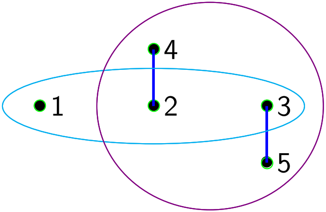
<u>Exercice :</u> sont-ils échangeables ?

Attention au parent !

$\{3\}$ et $\{2, 4\}$?

Formulation transversale

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



$$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup \{\{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}\} \cup \{S\}$$

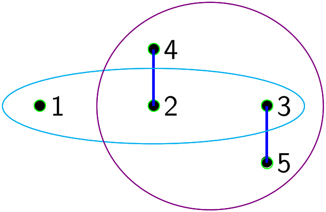
Exercice : sont-ils échangeables ?

Attention au parent !

$\{3\}$ et $\{2, 4\}$? **oui** $(3, 2)$

Formulation transversale

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup$
$\{\{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\},$
$\{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}\}$
$\cup\{S\}$

Exercice : sont-ils échangeables ?

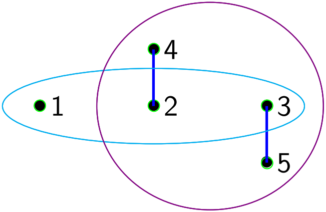
Attention au parent !

$\{3\}$ et $\{2,4\}$? **oui** $(3,2)$

$\{3,5\}$ et $\{2,4\}$?

Formulation transversale

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup$
$\{\{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\},$
$\{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}\}$
$\cup\{S\}$

Exercice : sont-ils échangeables ?

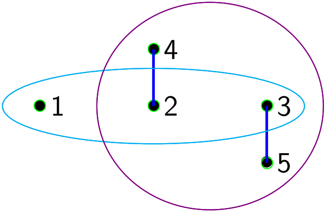
Attention au parent !

$\{3\}$ et $\{2,4\}$? **oui** $(3,2)$

$\{3,5\}$ et $\{2,4\}$? **oui** : $(3,2)$

Formulation transversale

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

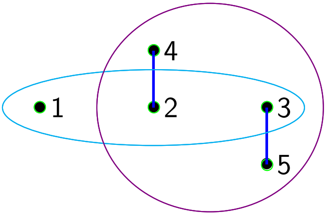


$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup$
$\{\{2, 4\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 3\},$
$\{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}\}$
$\cup\{S\}$

Exercice : sont-ils échangeables ?
Attention au parent !
$\{3\}$ et $\{2, 4\}$? **oui** $(3, 2)$
$\{3, 5\}$ et $\{2, 4\}$? **oui** : $(3, 2)$
$\{1, 2, 3, 5\}$ et $\{2, 4\}$?

Formulation transversale

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup$
$\{\{2, 4\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 3\},$
$\{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}\}$
$\cup \{S\}$

Exercice : sont-ils échangeables ?

Attention au parent !

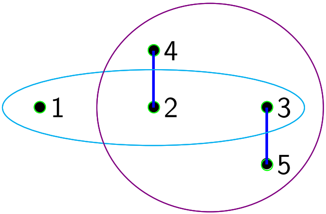
$\{3\}$ et $\{2, 4\}$? **oui** $(3, 2)$

$\{3, 5\}$ et $\{2, 4\}$? **oui** : $(3, 2)$

$\{1, 2, 3, 5\}$ et $\{2, 4\}$? **oui** : $(3, 4)$

Formulation transversale

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

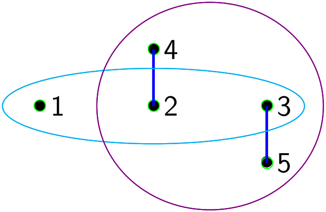


$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup$
$\{\{2, 4\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 3\},$
$\{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}\}$
$\cup\{S\}$

Exercice : sont-ils échangeables ?
Attention au parent !
$\{3\}$ et $\{2, 4\}$? **oui** $(3, 2)$
$\{3, 5\}$ et $\{2, 4\}$? **oui** : $(3, 2)$
$\{1, 2, 3, 5\}$ et $\{2, 4\}$? **oui** : $(3, 4)$
$\{1\}$ et $\{5\}$?

Formulation transversale

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup$
$\{\{2, 4\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 3\},$
$\{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}\}$
$\cup \{S\}$

Exercice : sont-ils échangeables ?

Attention au parent !

$\{3\}$ et $\{2, 4\}$? **oui** $(3, 2)$

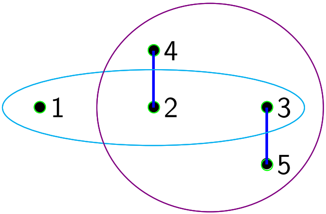
$\{3, 5\}$ et $\{2, 4\}$? **oui** : $(3, 2)$

$\{1, 2, 3, 5\}$ et $\{2, 4\}$? **oui** : $(3, 4)$

$\{1\}$ et $\{5\}$? non

Formulation transversale

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



$$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup$$
$$\{\{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\},$$
$$\{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}\}$$
$$\cup\{S\}$$

<u>Exercice :</u> sont-ils échangeables ?

Attention au parent !

$\{3\}$ et $\{2,4\}$? **oui** $(3,2)$

$\{3,5\}$ et $\{2,4\}$? **oui** : $(3,2)$

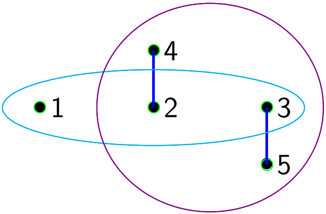
$\{1,2,3,5\}$ et $\{2,4\}$? **oui** : $(3,4)$

$\{1\}$ et $\{5\}$? non

$\{1\}$ et $\{3\}$?

Formulation transversale

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup$
$\{\{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\},$
$\{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}\}$
$\cup\{S\}$

Exercice : sont-ils échangeables ?

Attention au parent !

$\{3\}$ et $\{2,4\}$? **oui** $(3,2)$

$\{3,5\}$ et $\{2,4\}$? **oui** : $(3,2)$

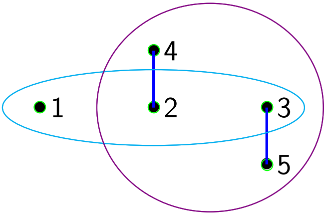
$\{1,2,3,5\}$ et $\{2,4\}$? **oui** : $(3,4)$

$\{1\}$ et $\{5\}$? non

$\{1\}$ et $\{3\}$? **oui** : $(1,3)$

Formulation transversale

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup$
$\{\{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\},$
$\{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}\}$
$\cup\{S\}$

Exercice : sont-ils échangeables ?

Attention au parent !

$\{3\}$ et $\{2,4\}$? **oui** $(3,2)$

$\{3,5\}$ et $\{2,4\}$? **oui** : $(3,2)$

$\{1,2,3,5\}$ et $\{2,4\}$? **oui** : $(3,4)$

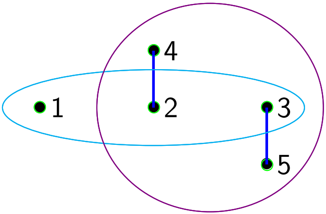
$\{1\}$ et $\{5\}$? non

$\{1\}$ et $\{3\}$? **oui** : $(1,3)$

$\{1,2,3\}$ et $\{2,3,4,5\}$?

Formulation transversale

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



$$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup$$
$$\{\{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\},$$
$$\{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}\}$$
$$\cup\{S\}$$

Exercice : sont-ils échangeables ?

Attention au parent !

$\{3\}$ et $\{2,4\}$? **oui** $(3,2)$

$\{3,5\}$ et $\{2,4\}$? **oui** : $(3,2)$

$\{1,2,3,5\}$ et $\{2,4\}$? **oui** : $(3,4)$

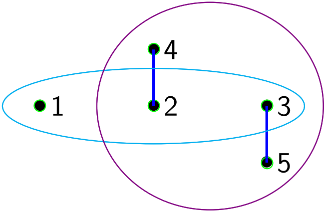
$\{1\}$ et $\{5\}$? non

$\{1\}$ et $\{3\}$? **oui** : $(1,3)$

$\{1,2,3\}$ et $\{2,3,4,5\}$? non

Formulation transversale

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup$
$\{\{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\},$
$\{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}\}$
$\cup \{S\}$

<u>Exercice :</u> sont-ils échangeables ?

Attention au parent !

$\{3\}$ et $\{2, 4\}$? **oui** $(3, 2)$

$\{3, 5\}$ et $\{2, 4\}$? **oui** : $(3, 2)$

$\{1, 2, 3, 5\}$ et $\{2, 4\}$? **oui** : $(3, 4)$

$\{1\}$ et $\{5\}$? non

$\{1\}$ et $\{3\}$? **oui** : $(1, 3)$

$\{1, 2, 3\}$ et $\{2, 3, 4, 5\}$? non

...

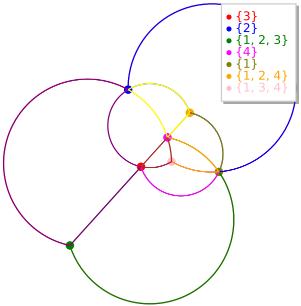
Séminaire DGeCo

1. Retour sur le précédent exposé
2. Éventail normal et idées de réalisation(s)
   - Introduction à la réalisation par l'éventail normal
   - Construction des g-vecteurs
   - Discussion sur les d-vecteurs
3. Cône de type
   - Algorithme pour un éventail simplicial
   - Échangeabilité dans les graphes et les édifices
   - Relation d'échange dans les graphes et les édifices
4. Idée d'extrémalité

Algorithme pour le cône de type (retour)

Méthode pour construire $\mathbb{TC}(\mathcal{F})$ pour $\mathcal{F}$ complet, essentiel et **simplicial** (McMullen, puis Chapoton, Fomin, Zelevinsky) :

- C_1 et C_2 max adjacents
- Relation d'échange : $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \sum_{i=3}^m \alpha_i r_i = \vec{0}$ avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$
- $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}\ ;\ \vec{\alpha} \text{ rel. d'échange}\}$



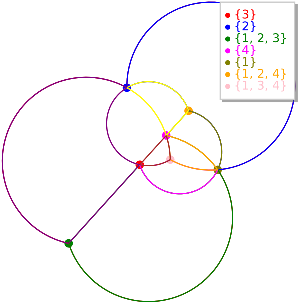
Caractérisation (Cône de type)

Le cône de type de $\mathcal{F}$ est : $\mathbb{TC}(\mathcal{F}) = \left\{\vec{h}\ ;\ \forall \vec{\alpha} \in \mathcal{A},\ \left\langle \vec{\alpha} \middle| \vec{h} \right\rangle > 0\right\}$

Algorithme pour le cône de type (retour)

Méthode pour construire $\mathbb{TC}(\mathcal{F})$ pour $\mathcal{F}$ complet, essentiel et **simplicial** (McMullen, puis Chapoton, Fomin, Zelevinsky) :

- C_1 et C_2 max adjacents **OK**
- Relation d'échange : $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \sum_{i=3}^{m} \alpha_i r_i = \vec{0}$ avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$
- $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}\ ;\ \vec{\alpha} \text{ rel. d'échange}\}$



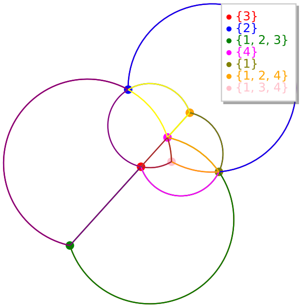
Caractérisation (Cône de type)

Le cône de type de $\mathcal{F}$ est : $\mathbb{TC}(\mathcal{F}) = \left\{\vec{h}\ ;\ \forall \vec{\alpha} \in \mathcal{A},\ \left\langle \vec{\alpha} \middle| \vec{h} \right\rangle > 0\right\}$

Algorithme pour le cône de type (retour)

Méthode pour construire $\mathbb{TC}(\mathcal{F})$ pour $\mathcal{F}$ complet, essentiel et **simplicial** (McMullen, puis Chapoton, Fomin, Zelevinsky) :

- C_1 et C_2 max adjacents **OK**
- Relation d'échange : $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \sum_{i=3}^{m} \alpha_i r_i = \vec{0}$ avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$
- $\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}\ ;\ \vec{\alpha} \text{ rel. d'échange}\}$



Caractérisation (Cône de type)

Le cône de type de $\mathcal{F}$ est : $\mathbb{TC}(\mathcal{F}) = \left\{\vec{h}\ ;\ \forall \vec{\alpha} \in \mathcal{A},\ \left\langle \vec{\alpha} \middle| \vec{h} \right\rangle > 0\right\}$

Relation d'échange

Ici, l'éventail choisi est $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, l'éventail des g-vecteurs, donc ses rayons sont les g-vecteurs : $g(B)$ pour $B \in \mathcal{B}$.

Relation d'échange

Ici, l'éventail choisi est $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, l'éventail des g-vecteurs, donc ses rayons sont les g-vecteurs : $g(B)$ pour $B \in \mathcal{B}$.

Soient deux ensembles nidifiés maximaux qui échangent A et A' : $\mathcal{N}_1 = (A, B_3, B_4, ..., B_m)$ et $\mathcal{N}_2 = (A', B_3, B_4, ..., B_m)$.

Relation d'échange

Ici, l'éventail choisi est $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, l'éventail des g-vecteurs, donc ses rayons sont les g-vecteurs : $g(B)$ pour $B \in \mathcal{B}$.

Soient deux ensembles nidifiés maximaux qui échangent A et A' : $\mathcal{N}_1 = (A, B_3, B_4, ..., B_m)$ et $\mathcal{N}_2 = (A', B_3, B_4, ..., B_m)$.
On cherche donc des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ tels que :

$$\alpha_1 g(A) + \alpha_2 g(A') + \sum_{i=3}^{m} \alpha_i g(B_i) = \vec{0}$$

avec en outre α_1 et α_2 positifs.

Relation d'échange

Ici, l'éventail choisi est $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, l'éventail des g-vecteurs, donc ses rayons sont les g-vecteurs : $g(B)$ pour $B \in \mathcal{B}$.

Soient deux ensembles nidifiés maximaux qui échangent A et A' :
$\mathcal{N}_1 = (A, B_3, B_4, ..., B_m)$ et $\mathcal{N}_2 = (A', B_3, B_4, ..., B_m)$.
On cherche donc des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ tels que :

$$\alpha_1 g(A) + \alpha_2 g(A') + \sum_{i=3}^{m} \alpha_i g(B_i) = \vec{0}$$

avec en outre α_1 et α_2 positifs.

<u>Problème :</u> Le théorème d'échangeabilité (en formulation transversale) ne donne pas les ensembles nidifiés maximaux adjacents...

Composantes connexes

Pour un graphe, on connaît bien le principe de composantes connexes.

Composantes connexes

Pour un graphe, on connaît bien le principe de composantes connexes.

Pour un édifice $\mathcal{B}$ sur S, on définit :

Définition (Composantes connexes)

Soit $R \subseteq S$, les *composantes connexes* de R sont :

$$\kappa(R) := \max\left\{B \ ; \ B \in \mathcal{B} \text{ et } B \subseteq R\right\}$$

Composantes connexes

Pour un graphe, on connaît bien le principe de composantes connexes.

Pour un édifice $\mathcal{B}$ sur S, on définit :

Définition (Composantes connexes)

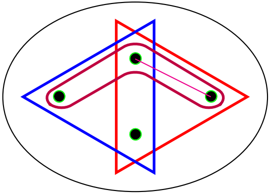
Soit $R \subseteq S$, les *composantes connexes* de R sont :

$$\kappa(R) := \max \{B \; ; \; B \in \mathcal{B} \text{ et } B \subseteq R\}$$

Remarque : Si R n'est pas un bloc, il a plusieurs composantes connexes.

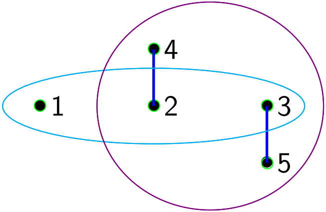
Composantes connexes

$S = \{1, 2, 3, 4\}$



$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup \{\{1,2\}; \{1,2,3\}; \{1,3,4\}; \{1,2,4\}\} \cup \{S\}$

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



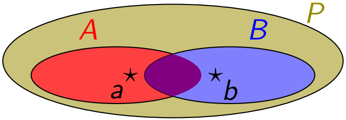
$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup \{\{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}\} \cup \{S\}$

Relation d'échange

2 constats ensemblistes :

$$A \cap B = \bigsqcup_{F \in \kappa(A \cap B)} F$$

$$P = (A \cup B) \sqcup \bigsqcup_{W \in \kappa(P \setminus (A \cup B))} W$$

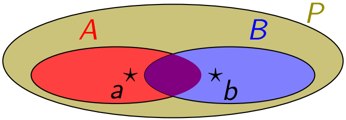


Relation d'échange

2 constats ensemblistes :

$$A \cap B = \bigsqcup_{F \in \kappa(A \cap B)} F$$

$$P = (A \cup B) \sqcup \bigsqcup_{W \in \kappa(P \setminus (A \cup B))} W$$



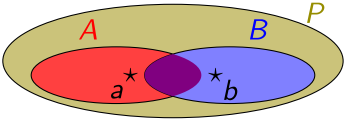
Rappel : $g(B) = \pi\left(\sum_{x \in B} e_x\right)$

Relation d'échange

2 constats ensemblistes :

$$A \cap B = \bigsqcup_{F \in \kappa(A \cap B)} F$$

$$P = (A \cup B) \sqcup \bigsqcup_{W \in \kappa(P \setminus (A \cup B))} W$$



Rappel : $g(B) = \pi\left(\sum_{x \in B} e_x\right)$

Caractérisation (Relation d'échange)

Si A et B sont échangeables avec pour parent P, alors :

$$g(A) + g(B) + \sum_{W \in \kappa(P \setminus (A \cup B))} g(W) > g(P) + \sum_{F \in \kappa(A \cap B)} g(F)$$

Relation d'échange et cône de type

On peut enfin conclure :

Cône de type d'un édifice

Soit $\mathcal{B}$ un édifice.

Relation d'échange et cône de type

On peut enfin conclure :

Cône de type d'un édifice

Soit $\mathcal{B}$ un édifice.
Soit $\mathcal{T} = \{(A, B, P)\ ;\ A$ et B échangeables avec P pour parent$\}$.

Relation d'échange et cône de type

On peut enfin conclure :

Cône de type d'un édifice

Soit $\mathcal{B}$ un édifice.
Soit $\mathcal{T} = \{(A, B, P)\ ;\ A$ et B échangeables avec P pour parent$\}$.
Soit $\mathcal{A} = \{e_A + e_B + \sum_W e_W - e_P - \sum_F e_F\ ;\ (A, B, P) \in \mathcal{T}\}$.

Relation d'échange et cône de type

On peut enfin conclure :

Cône de type d'un édifice

Soit $\mathcal{B}$ un édifice.
Soit $\mathcal{T} = \{(A, B, P)\ ;\ A \text{ et } B \text{ échangeables avec } P \text{ pour parent}\}$.
Soit $\mathcal{A} = \{e_A + e_B + \sum_W e_W - e_P - \sum_F e_F\ ;\ (A, B, P) \in \mathcal{T}\}$.
Alors :

$$\mathbb{TC}_g(\mathcal{B}) = \left\{\vec{h} \in \mathbb{R}^{\mathcal{B}}\ ;\ \forall \vec{\alpha} \in \mathcal{A},\ \left\langle \vec{\alpha} \,\middle|\, \vec{h} \right\rangle > 0\right\}$$

Séminaire DGeCo

Remarques sur les relations d'échange

Caractérisation (Relation d'échange)

Si A et B sont échangeables avec pour parent P, alors :

$$g(A) + g(B) + \sum_{W \in \kappa(P \setminus (A \cup B))} g(W) > g(P) + \sum_{F \in \kappa(A \cap B)} g(F)$$

- La relation d'échange ne dépend pas de l'arête compressible (a, b).

Remarques sur les relations d'échange

Caractérisation (Relation d'échange)

Si A et B sont échangeables avec pour parent P, alors :

$$g(A) + g(B) + \sum_{W \in \kappa(P \setminus (A \cup B))} g(W) > g(P) + \sum_{F \in \kappa(A \cap B)} g(F)$$

- La relation d'échange ne dépend pas de l'arête compressible (a, b).
- La relation d'échange ne contient que des 1, 0 et -1.

Remarques sur les relations d'échange

Caractérisation (Relation d'échange)

Si A et B sont échangeables avec pour parent P, alors :

$$g(A) + g(B) + \sum_{W \in \kappa(P \setminus (A \cup B))} g(W) > g(P) + \sum_{F \in \kappa(A \cap B)} g(F)$$

- La relation d'échange ne dépend pas de l'arête compressible (a, b).
- La relation d'échange ne contient que des 1, 0 et -1.
- Dans un graphe, si t_1 et t_2 sont échangeable, un seul parent est possible $(t_1 \cup t_2)$, donc il y a unicité de la relation d'échange.

Remarques sur les relations d'échange

Caractérisation (Relation d'échange)

Si A et B sont échangeables avec pour parent P, alors :

$$g(A) + g(B) + \sum_{W \in \kappa(P \setminus (A \cup B))} g(W) > g(P) + \sum_{F \in \kappa(A \cap B)} g(F)$$

- La relation d'échange ne dépend pas de l'arête compressible (a, b).
- La relation d'échange ne contient que des 1, 0 et -1.
- Dans un graphe, si t_1 et t_2 sont échangeable, un seul parent est possible ($t_1 \cup t_2$), donc il y a unicité de la relation d'échange.
- Dans un édifice quelconque, il peut y avoir plusieurs parents et donc plusieurs relations pour A et B échangeables.

Échanges extrémaux

Inégalité redondante

Dans $\{a > c \ ; \ b > c \ ; \ a + b > 2c\}$, la 3ème est redondante.

Échanges extrémaux

Inégalité redondante

Dans $\{a > c\ ;\ b > c\ ;\ a + b > 2c\}$, la 3ème est redondante.

Dans $\mathcal{A}$, il y a (vraiment) beaucoup de relations redondantes.

Échanges extrémaux

Inégalité redondante

Dans $\{a > c\ ;\ b > c\ ;\ a + b > 2c\}$, la 3ème est redondante.

Dans $\mathcal{A}$, il y a (vraiment) beaucoup de relations redondantes.

Définition (Relation extrémale)

Une relation est *extrémale* dans $\mathcal{A}$ si elle n'est pas dans le cône engendré par les autres. $\mathcal{A}^{\text{ext}}$ est l'ensemble des relations extrémales dans $\mathcal{A}$.

Échanges extrémaux

Inégalité redondante

Dans $\{a > c\ ;\ b > c\ ;\ a + b > 2c\}$, la 3ème est redondante.

Dans $\mathcal{A}$, il y a (vraiment) beaucoup de relations redondantes.

Définition (Relation extrémale)

Une relation est *extrémale* dans $\mathcal{A}$ si elle n'est pas dans le cône engendré par les autres. $\mathcal{A}^{\text{ext}}$ est l'ensemble des relations extrémales dans $\mathcal{A}$.

Théorème (McMullen 1973)

Soit l'ensemble $\mathcal{A}^{\text{ext}}$ des relations extrémales de $\mathcal{F}$, on a :

$$\mathbb{TC}(\mathcal{F}) = \left\{ \vec{h} \in \mathbb{R}^{\mathbf{r}}\ ;\ \forall \vec{\alpha} \in \mathcal{A}^{\text{ext}},\ \vec{\alpha} \cdot \vec{h} > 0 \right\}$$

Échanges extrémaux

Définition (Échanges extrémaux)

L'échange de deux blocs A et B avec pour parent P est dit *extrémal* si la relation d'échange associée est extrémale.

Échanges extrémaux

Définition (Échanges extrémaux)

L'échange de deux blocs A et B avec pour parent P est dit *extrémal* si la relation d'échange associée est extrémale.

Échanges extrémaux

L'échange de A et B avec pour parent P est extrémal si et seulement si A et B sont maximaux dans P.

Cela permet de construire facilement le cône de type,

Échanges extrémaux

Définition (Échanges extrémaux)

L'échange de deux blocs A et B avec pour parent P est dit *extrémal* si la relation d'échange associée est extrémale.

Échanges extrémaux

L'échange de A et B avec pour parent P est extrémal si et seulement si A et B sont maximaux dans P.

Cela permet de construire facilement le cône de type, de déterminer le cône de type d'une transformation d'édifice,

Échanges extrémaux

Définition (Échanges extrémaux)

L'échange de deux blocs A et B avec pour parent P est dit *extrémal* si la relation d'échange associée est extrémale.

Échanges extrémaux

L'échange de A et B avec pour parent P est extrémal si et seulement si A et B sont maximaux dans P.

Cela permet de construire facilement le cône de type, de déterminer le cône de type d'une transformation d'édifice, de savoir quels sont les édifices ayant un cône de type simplicial,

Échanges extrémaux

Définition (Échanges extrémaux)

L'échange de deux blocs A et B avec pour parent P est dit *extrémal* si la relation d'échange associée est extrémale.

Échanges extrémaux

L'échange de A et B avec pour parent P est extrémal si et seulement si A et B sont maximaux dans P.

Cela permet de construire facilement le cône de type, de déterminer le cône de type d'une transformation d'édifice, de savoir quels sont les édifices ayant un cône de type simplicial, comment construire des associaèdres d'édifice par des sommes de Minkowski

Échanges extrémaux

Définition (Échanges extrémaux)

L'échange de deux blocs A et B avec pour parent P est dit *extrémal* si la relation d'échange associée est extrémale.

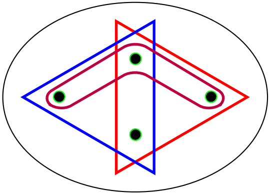
Échanges extrémaux

L'échange de A et B avec pour parent P est extrémal si et seulement si A et B sont maximaux dans P.

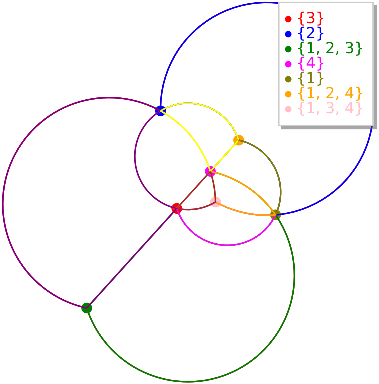
Cela permet de construire facilement le cône de type, de déterminer le cône de type d'une transformation d'édifice, de savoir quels sont les édifices ayant un cône de type simplicial, comment construire des associaèdres d'édifice par des sommes de Minkowski...

Exemples d'échanges extrémaux

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$



$$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup \{\{1, 2, 3\}; \{1, 3, 4\}; \{1, 2, 4\}\} \cup \{S\}$$



Exemples d'échanges extrémaux

Relation d'échange	A	B	P	Est extrémale
$(1,1,1,0,-1,0,0,0)$	$\{1\}$ $\{1\}$ $\{2\}$	$\{2\}$ $\{3\}$ $\{3\}$	$\{1,2,3\}$	**Oui**
$(1,1,0,1,0,-1,0,0)$	$\{1\}$ $\{1\}$ $\{2\}$	$\{2\}$ $\{4\}$ $\{4\}$	$\{1,2,4\}$	**Oui**
$(1,0,1,1,0,0,-1,0)$	$\{1\}$ $\{1\}$ $\{3\}$	$\{3\}$ $\{4\}$ $\{4\}$	$\{1,3,4\}$	**Oui**
$(-1,0,0,-1,0,1,1,0)$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	S	**Oui**
$(-1,0,-1,0,1,0,1,0)$	$\{1,2,3\}$	$\{1,3,4\}$	S	**Oui**
$(-1,-1,0,0,1,1,0,0)$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	S	**Oui**
$(0,1,0,0,0,0,1,0)$	$\{2\}$	$\{1,3,4\}$	S	Non
$(0,0,1,0,0,1,0,0)$	$\{3\}$	$\{1,2,4\}$	S	Non
$(0,0,0,1,1,0,0,0)$	$\{4\}$	$\{1,2,3\}$	S	Non

Merci pour votre attention !